الماماد الماماد الماماد

الدكتورة ســحـــر فـــتح الله

كتبة الإدارة والإقتصاد اجامعة بعداد

الأستاذ الدكتور حسيسن على بخسيت

> مغليه الإدارة والإعتصاد - جامعة بعداه حامعة الرسومة الأردسة حالماً





الإقتصاد القـياسي



سجل في الكرة الجامعية المركزية قرالجرد 2002 م قرالتصنيف

الإقتصاد القـياسـي

الدكتورة سـحـر فـتح الله

كلية الإدارة والإقتصاد - جامعة بغداد

الأستاذ الدكتور حسيــن علي بخــيت

كلية الإدارة والإقتصاد - جامعة بغداد جامعة الزيتونة الأردنية حالياً

معهد العلوم الإقتصادية والتجارية والتسيير مدالمكتبسة م



الإهداء

إلى / زوجتي اعتزازاً ووفاءً بناتي ... رفال، رولى وأولادي...زيدون،خلدون....حباً وإخلاصاً

حسين

إلى /

والديّ ... أطال الله عمرهما

أسرتي.... زوجي وبناتي حباً وتقديراً

سحر

لمحتويات

13-7	لمحتويات	
16-15		تمهيد
33-17	الاول: المقدمة.	تغصل
18	1.1 تعريف الاقتصاد القياسي.	
19	2.1 أهداف الاقتصاد القياسي.	
20	3.1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى.	-
22	4.1 النموذج الاقتصادي.	
25	5.1 أنواع النماذج.	
26	6.1 مكونات النموذج.	
27	7.1 منهجية الاقتصاد القياسي.	
31	8.1 أسلوب الاقتصاد القياسي.	
33	9.1 الأسئلة والتمارين.	
78-34	الثاني: الانحدار الخطي البسيط، Simple Linear Regression	لفصل
36	1.2 المقدمة.	
38	2.2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي.	
41	3.2 طريقة المربعات الصغرى، OLS.	
45	1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:	
46	1.1.3.2 طريقة الحذف والتعويض	
47	2.1.3.2 طريقة المحددات.	
50	3.1.3.2 طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.	

53	4.1.3.2 طريقة المصفوفات.	
59	2.3.2 الخواص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى.	
59	1.2.3.2 الخاصية الخطية.	
64	2.2.3.2 خاصية عدم التحيز.	
67	3.2.3.2 خاصية أفضل مقدر.	
74	4.2 تقدير تباين حد الخطأ العشوائي.	
78	5.2 الأسئلة والتمارين.	
132-80	مل الثالث: اختبار الفرضيات، Hypotheses Testing.	الفص
81	1.3 المقدمة.	
82	t-Value Test ، t ختبار قیمة 2.3	
87	3.3 معامل التحديد، R ² Determinant Coefficient.	
91	F-Statistics (F اختبار إحصائية 4.3	
96	5.3 معامل الارتباط البسيط، r،	
	.Simple Correlation Coefficient	
104	6.3 حدود الثقة لمعاملات الانحدار.	
108	7.3 التنبؤ.	
127	8.3 الأسئلة والتمارين.	
186-133	ل الرابع: الانحدار الخطي المتعدد،Multiple Linear Regression	الفص
134	1.4 المقدمة.	
135	2.4 النموذج الخطي المتعد.	
136	3.4 فرضيات النموذج الخطي المتعدد.	
139	4.4 طرق تقدير معلمات النموذج.	
142	1.4.4 طريقة المحددات	

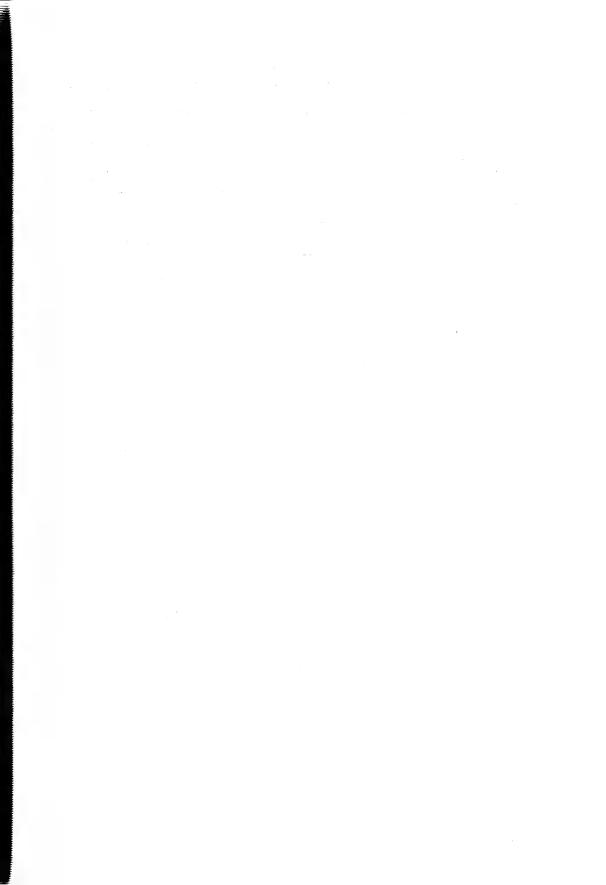
144	2.4.4 طريقة الانحرافات.	
155	5.4 التباين والخطأ المعياري لمقدرات OLS.	
161	•	
	6.4 اختبار فرضيات النموذج الخطي المتعدد.	-
161	1.6.4 اختبار معنوية المعالم (t).	
164	$ m R^2$ معامل التحديد المتعدد، $ m 2.6.4$	
168	3.6.4 اختبار إحصائية F.	
171	7.4 تحليل جدول التباين، ANOVA.	
179	8.4 قياس حدود الثقة.	
182	9.4 الأسئلة والتمارين.	
227-187	الخامس: مشكلة الارتباط الذاتي، The Autocorrelation Problem	لفصل
188	1.5 المقدمة.	
189	2.5 مسببات الارتباط الذاتي.	
190	3.5 تحليل الارتباط الذاتي.	
195	4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتي.	
195	1.4.5 طريقة اختبار إحصائية D-W.	
196	2.4.5 طريقة 2.4.5	
196	3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT.	
197	4.4.5 طريقة DURBIN.	
198	5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي.	
198	6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتي.	
201	7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.	
202	Transformation Method ، طريقة التحويل، 1.7.5	

204	2.7.5 طريقة التكرار، Iterative Method.	
206	3.7.5 طريقة الفرق العام،	
	.The Generalized Difference Method	
207	4.7.5 طريقة الفرق الأول،	
	.The First Difference Method	
225	8.5 الأسئلة والتمارين.	
256-228	السادس: مشكلة التعدد الخطي، The Multicollinearity Problem	الفصل
229	1.6 المقدمة.	
230	2.6 طبيعة التعد الخطي.	
231	3.6 أسباب حدوث ظاهرة التعدد الخطي.	
232	4.6 أنواع التعدد الخطي:	
232	Absence of Multicollinearity ، غياب التعد الخطي	
233	2.4.6 التعدد الخطي التام،Exact Multicollinearity.	
234	No Exact Multicollinearity ، فير النّام، 3.4.6	
236	5.6 النتائج المترتبة على وجود التعد الخطي.	
237	6.6 طرق اختبار وجود التعدد الخطي:	
237	1.6.6 اختبار Firsch.	
244	2.6.6 طريقة FARRAR-GLAUBER	
244	χ^2 اختبار مربع کاي، χ^2 .	
248	2.2.6.6 اختبار إحصاءه F.	
249	3.2.6.6 اختبار إحصاءه t.	
250	3.6.6 اختبار كلاين.	

251	7.6 طرق معالجة مشكلة التعد الخطى.	
253	8.6 الأسئلة والتمارين.	
286-257	السابع: مشكلة عدم تجانس تباين المتغير العشوائي، The Heteroscedasticity Problem	لغصل
256	1.7 المقدمة.	
258	2.7 طبيعة مشكلة عدم تجانس حد الخطأ.	
263	3.7 أسباب عدم تجانس حد الخطأ.	
264	4.7 اكتشاف عدم تجانس حد الخطأ.	
264	1.4.7 أختبار كولدفيلد وكوانت.	
269	2.4.7 اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.	
274	3.4.7 أختبار بارتليت.	
277	4.4.7 طريقة كليجسر.	•
277	5.4.7 اختبار بارك.	
279	5.7 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين.	
282	6.7 الأسئلة والتمارين	
335-287	الثامن: نماذج المعادلات الآنية، Simultaneous Equations Models	لغصل
286	1.8 طبيعة المعادلات الآنية.	
288	2.8 مشكلة التحيز الآني.	
291	3.8 نماذج المعادلات الآنية في النظرية الاقتصادية.	
291	1.3.8 نموذج العرض والطلب.	
297	2.3.8 النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي.	
300	3.3.8 نموذج فيلبس الأجر النقدي-السعر.	
301	4.8 الشكل المختزل.	

312	5.8 تقدير نموذج المعادلات الآنية.	
312	1.5.8 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، ILS.	
316	2.5.8 طريقة المتغير الاداتي، IV.	
323	3.5.8 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين، TSLS.	
329	6.8 الأسطلة والتماريان.	
351-336	مل التاسع: مشكلة التشخيص، Identification Problem	الفص
335	1.9 المقدمة.	
337	2.9 طبيعة مشكلة التشخيص.	
339	3.9 شروط التشخيص.	
348	4.9 الأسئلة والتمارين.	
376-352	مل العاشر: المتغيرات المرتدة زمنياً،	الفص
	The Lagged Variables	
351	1.10 المقدمة.	
351	2.10 مفهوم النموذج المرتد زمنياً.	
354	3.10 أسباب وجود الارتداد الزمني.	
355	4.10 تقدير النموذج المرتد زمنياً:	
355	1.4.10 نموذج كويك، KOYCH.	
359	2.4.10 نموذج التوقع لــ CAGAN.	
366	3.4.10 نموذج التعديل الجزئي لـ نيرلوف، NERLOV	
370	4.4.10 نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لــ المون، ALMON	
372	5.10 الأسئلة والتمارين.	
402-377	ل الحادي عشر: المتغيرات الوهمية، Dummy Variables	الفص
376	1.11 المقدمة.	

377	2.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي مستقل واحد.	
383	3.11 نموذج الانحدار المتضمن أكثر من متغير وهمي مستقل.	
389	4.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي تابع.	
396	5.11 الأسئلة والتمارين.	
409-403	ار.	لمصا
400	أولاً: المصادر العربية.	
402	ثانياً: المصادر الانكليزية.	
440-410	لملاحق.	



تم هدد:

ق يكون من الغريب القول ان الأسلوب الأمثل للوصول إلى الغاية من دراسة المقاسي هو معرفة ما هو مطلوب من دراسة العلوم المقاربة له للتمكن من تعييزه عنها، ونعني بالعلوم المقاربة هي الإحصاء الاقتصادي والاقتصاد الرياضي.

وبينما يهتم الاقتصاد الرياضي بالنظرية الاقتصادية وصياغتها بأسلوب ريضي، يتوقف عند هذا الحد، لأن ذلك يتم بدون إجراء اختبار لمعرفة مدى مطابقتها المعتضق الاقتصادي، يهتم الإحصاء الاقتصادي بالمقابل بتجميع وتبويب البيانات وكت الذي يميز المعتصادية، وهو أيضا لا يعير أية أهمية لتحليل نتائج هذه البيانات، ولكن الذي يميز المعتصاد القياسي عن الإحصاء الاقتصادي والاقتصاد الرياضي هو اهتمامه بالأسس المعتسبة والاختبارات التجريبية للفرضيات الاقتصادية. غير ان العلاقة بين هذه العلوم وضية، حيث نجد أثر ذلك عندما يستخدم الاقتصاد القياسي ما متاح من البيانات التي يوفرها الإحصاء الاقتصادي بغية تحديد العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية وتفسيرها عوالمقابل يعتمد أي الاقتصاد الرياضي في وصفه للفرضيات التي تعتمد على التسبيب المقرى بشكل رقمي أو عددي، ومن ثم تقييمها.

وبعبارة موجزة فان الاقتصاد القياسي يحاول الاستفادة من عملية الجمع الحاصلة في النظرية الاقتصادية والأساليب الرياضية، في إطار الاقتصاد الرياضي، ثم الاستعانة بالطرق الإحصائية للحصول على تقديرات كمية لاستخدامها في عمليات قد القرار والتنبؤ ودراسة التغيرات الهيكلية.

وقد تم عرض نظرية الاقتصاد القياسي في هذا الكتاب في أحد عشر فصلا، تصمن الفصل الأول منه مقدمة للتعريف بالاقتصاد القياسي وأهدافه وعلاقته بالعلوم لأخرى. أما الفصل الثاني فقد تم فيه التطرق إلى تحليل الانحدار الخطي البسيط

بطريقة المربعات الصغرى واختبار الفرضيات في فصل ثالث، ليتخصص الفصل الرابع في وصف الانحدار الخطي المتعدد واختبار فرضياته. أما مشاكل النموذج الخطي والمتمثلة بمشكلة الارتباط الذاتي ومشكلة التعدد الخطي ومشكلة عدم ثبات تجانس التباين فقد تم استعراضها في الفصول الخامس والسادس والسابع على التوالي. ولبيان طبيعة المعادلات الآنية ومشكلة التحيز الآني وطرق التقدير كان الفصل الثامن بعنوان نماذج المعادلات الآنية، ليكون الفصل التاسع وقفة لعرض مشكلة التشخيص وبيان طبيعة المشكلة وشروط التشخيص، أما الفصل العاشر فقد تم فيه استعراض المتغيرات المرتدة زمنيا بشكل مفصل، ليكون الفصل الحادي عشر محطة أخيرة لعرض ثلاثة من نماذج الانحدار تتضمن متغيرات وهمية عنوانه المتغيرات الوهمية.

الدكتورة سحر فتح الله كلية الإدارة والاقتصاد يأ جامعة بغداد

الأستاذ الدكتور حسين على بخيت كلية الإدارة والاقتصاد جامعة بغداد/جامعة الزيتونة الاردنية حالياً

2006

الفصل الأول: المقدمة

- 1.1 تعريف الاقتصاد القياسي.
- 2.1 أهداف الاقتصاد القياسي.
- 3.1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى.
 - 4.1 النموذج الاقتصادي.
 - 5.1 أنواع النماذج.
 - 6.1 مكونات النموذج.
 - 7.1 منهجية الاقتصاد القياسي.
 - 8.1 أسلوب الاقتصاد القياسي.

الفصل الأول: المقدم____ة

1.1 تعريف الاقتصاد القياسي، Definition of Econometrics

يع د الاقتصاد القياسي، Econometrics، أسلوب من أساليب التحليل الاقتصادي يهتم بالتقدير العددي (الكمي) للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية معتمداً في ذلك على النظرية الاقتصادية، Economic Theory، والرياضيات، Mathematics، والإحصاء، Statistics، للوصول إلى هدفه الخاص باختبار الفروض والتقدير ومن ثم التنبؤ بالظواهر الاقتصادية.

هذا يعني ان الاقتصاد القياسي يحاول الاستعانة أولاً بالنظرية الاقتصادية لـ تحديد المشكلة المراد دراستها ولأهم المتغيرات الاقتصادية والاجتماعية التي تؤثر فيها، ومن ثم يستعين بالاقتصاد الرياضي لتوصيف العلاقات القائمة بين المتغيرات في شكل رموز ومعادلات، وأخيراً يستعين بعلم الإحصاء فيستفيد منها في تطوير واستنباط طرق القياس لتقدير معالم الصيغ المقترحة واختبار الفروض ومن ثم الوصول إلى النتائج الدقيقة التي يمكن الاعتماد عليها في التنبؤ بالمشكلة المدروسة.

بذلك يمكن القول بأن الاقتصاد القياسي هو تكامل للنظرية الاقتصادية مع الرياضيات والأساليب الإحصائية بهدف اختبار الفروض عن الظواهر الاقتصادية، وتقدير معاملات العلاقات الاقتصادية، والتنبؤ بالقيم المستقبلية للظواهر الاقتصادية.

على يمكن تعريف الاقتصاد القياسي بأنه علم اجتماعي تستخدم فيه أدوات النظرية الاقتصادية، وأنه يتكون النظرية الاقتصادية، وأنه يتكون من كلمتين أصلهما إغريقي Economy، اقتصاد، و Metrics والتي تعني قياسات.

2.1 أهداف الاقتصاد القياسي، The Goals of Econometrics

يمكن التعرف على ثلاث أهداف أساسية للاقتصاد القياسي هي:

أولاً: تحليل واختبار النظريات الاقتصادية المختلفة:

إن تحليل واختبار النظريات الاقتصادية، يعد هدفاً رئيساً من أهداف الاقتصاد القياسي، ولا يمكن عدد النظرية الاقتصادية صحيحة ومقبولة ما لم تجتاز اختباراً كمياً عددياً يوضح قوة النموذج ويفسر قوة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية.

ثانياً: رسم السياسات واتخاذ القرارات:

يساهم الاقتصاد القياسي برسم السياسات واتخاذ القرارات عن طريق الحصول على قيم عددية لمعلمات العلاقات الاقتصادية بين المتغيرات لتساعد رجال الأعمال والحكومات في اتخاذ القرارات الحالية من حيث توفيره لصيغ وأساليب مختلفة لتقدير المسرونات والمعلمات الفنية والستكلفة الحدية والإيرادات الحدية، والميل الحدي للاستهلاك والادخار والاستثمار وغير ذلك، وتأسيساً على ذلك فأن معرفة القيم العددية لمعلمات النموذج المقدّر تساعد على إجراء المقارنات واتخاذ القرار المناسب سواءً على مستوى المنشأة أو الدولة.

ثالثاً: التنبؤات بقيم المتغيرات الاقتصادية في المستقبل:

يساعد الاقتصاد القياسي رجال الأعمال والحكومات في وضع السياسات من خلال توفير القيم العددية لمعلمات، Parameters، المتغيرات الاقتصادية والتنبؤ بما سحتكون عليه الظاهرة الاقتصادية مستقبلاً. ان هذه التنبؤات تمكن واضعي السياسة ومستخذي القرار لتنظيم الحياة الاقتصادية واتخاذ إجراءات معينة للتأثير في متغيرات اقتصادية معينة، مثال ذلك، لو أرادت الحكومة معرفة الآثار المحتملة للسياسة النقدية علي التضخم والبطالة، وما هو الأثر المتوقع لزيادة أسعار السلع البديلة أو المكملة

على الكمية المطلوبة من السلعة الأصلية، حيث ان الاقتصاد القياسي سوف يحدد مستوى الكمية فيما إذا كان مرتفعاً أو منخفضاً وهكذا لبقية الظواهر الاقتصادية وما يتعلق بها مستقبلاً.

3.1 علاقة الاقتصاد القياسي بالعلوم الأخرى:

للاقتصاد القياسي علاقة وثيقة بالنظرية الاقتصادية والاقتصاد الرياضي، الإحصاء الاقتصادي، والإحصاء الرياضي، ان هذه الفروع تتكامل من أجل توفير قيم عددية لمعلمات المتغيرات الاقتصادية المختلفة، إلا إن أياً من هذه الفروع لا يعد بديلاً عن الاقتصاد القياسي، ويمكن توضيح ذلك كما يلي:

1- تقوم النظرية الاقتصادية بدراسة العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية فتنص النظرية الاقتصادية الجزئية مثلاً على ان زيادة سعر سلعة ما تسبب انخفاضاً في الطلب على يها، فتفترض هذه النظرية وجود علاقة عكسية بين السعر والكمية المطلوبة من السلعة، ولكنها لم تعط أي قياس عددي للعلاقة بين هذين المتغيرين فلم تبين مقدار الانخفاض للكمية المطلوبة المصاحب لتغير معين في السعر فتصبح هذه المهمة من مهمات الاقتصاد القياسي بعد توصيفه رياضياً.

بذلك يمكن القول ان العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية المستوحاة من النظرية الاقتصادية تبيقى مسألة مجردة ما لم يتم تقديرها أي تقدير معالمها في ضوء البيانات الإحصائية الواقعية والتي هي من مهمات القياس الاقتصادي (تحديد الطابع الكمي للعلاقات بين المتغيرات الاقتصادية الجارية في واقع معين وذلك بالاسترشاد بالنظرية الاقتصادية).

2- يهستم الاقتصساد الرياضي بإعادة صياغة العلاقة التي تم تحديدها بالاعتماد على النظرية الاقتصادية رياضياً أي على هيئة معادلات ورموز رياضية بدون قياس

أو برهنة عددية لتلك الصياغات، فالقياسات والبرهنة العددية هي من مهمات القياس الاقتصادي.

- 5- الإحصاء الاقتصادي يقتصر دوره على تجميع البيانات الإحصائية الخاصة بالمتغيرات الاقتصادية التي تتكون منها العلاقات المحددة في (1) و(2) أعلاه وتسجيلها وجدولتها أو رسمها وينصب دور القياس الاقتصادي على تحليل واختبار نوع العلاقة بين المتغيرات بهدف معرفة مدى مطابقة النتائج مع منطوق النظرية الاقتصادية.
- 4- أما مادة الإحصاء الرياضي فهي تجهز الباحث بأدوات تحليلية يستخدمها في دراسة العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية وبطرق خاصة لمعالجة أخطاء التقدير تمهيداً لاستخدامها في تحقيق أهداف القياس الاقتصادي.

لذلك يمكن النظر إلى علم القياس الاقتصادي على انه نقطة التقاء ثلاث علوم رئيسة هي الاقتصاد والرياضيات والإحصاء كما مبين في الشكل (1.1).

الشكل (1.1): الاقتصاد القياسي وعلاقته بالطوم الأخرى.
اخصاء اقتصادية اقتصادي اقتصاد العصاء المصاء الم

يتضح مما تقدم ان النظرية الاقتصادية تعطينا فكرة عامة حول شكل العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية ويأتي دور الاقتصاد القياسي لتحديد المقدار الكمي لتلك العلاقة بالاعتماد على الاقتصاد الرياضي الذي يحاول تصوير العلاقة المذكورة بشكل معادلة رياضية، وطرق الإحصاء الرياضي لملائمتها لطبيعة العلاقة القائمة، كل ذلك يتحقق بالاعتماد على الإحصاء الاقتصادي الذي يغذي القياس الاقتصادي بالمادة الأولية اللازمة للتحليل في صورة بيانات مجمعة ومبوبة وبدون هذه البيانات تصبح عملية القياس أمراً مستحيلاً.

4.1 النموذج الاقتصادي، Economic Model:

يعرف المتعود الاقتصادي بأنسه مجموعة من العلاقات بين المتغيرات الاقتصادية لتمثيل ظاهرة معينة بصورة خالية من التفاصيل والتعقيدات ولكنها ممثلة للواقع بهدف تعليلها أو التنبؤ بها والسيطرة عليها. وقد يتكون من معادلة واحدة، Single Equation، مئل معادلة الطلب أو معادلة العرض ويسمى عندئذ النموذج بكونسه نموذج ذات معادلة منفردة، أو من مجموعة من المعادلات وتسمى بالمعادلات الأنية، Simultaneous Equation، كنموذج السوق.

وقد يكون الهدف من النموذج هو تقدير قيم عددية لمعلمات علاقة بين متغيرات اقتصادية بغية التنبؤ أو تحليل هيكل اقتصادي أو تقييم سياسة اقتصادية. ويستخدم النموذج الاقتصادي الرموز الرياضية فمثلاً تفترض النظرية الاقتصادية بأن الاستهلاك C، دالة في الدخل، Y، أي ان:

$$C = f(Y) \qquad \dots (1.1)$$

إذ تمــتل C المتغير الاسـتجابة، Dependent variable، أمــا Y فيمثل المتغير التوضيحي، Independent variable، وتحكــم العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية بعدد من الصيغ أبسطها الصيغة الخطية، فبتحويل العلاقة (1.1) إلى صيغتها الخطية تكون:

$$C = B_0 + B_1 Y$$
(2.1)

حيث تمنثل B_1 ، B_0 المعلمات، Coefficients، ويمكن ان توضع من الناحية الرياضية على النحو الآتى:

أ. رياضياً:

 $C=B_0+B_1Y$ عندما يزداد المتغير المستقل Y بمقدار وحدة واحدة، نحصل على: $C+\Delta C=B_0+B_1(Y+1)$

$$C + \Delta C = B_0 + B_1 Y + B_1$$

نعوض عن قيمة C بما يعادلها:

 $B_0 + B_1 Y + \Delta C = B_0 + B_1 Y + B_1$

وبعد الاختصار ، نحصل على:

 $\Delta C = B_1$

وفي ضوء ذلك يمكن القول ان الميل الحدي للاستهلاك يمثل مقدار الزيادة الحاصلة

في C بنسبة زيادة Y بمقدار وحدة واحدة، أي ان:

$$B_1 = \frac{\Delta C}{\Delta Y}$$

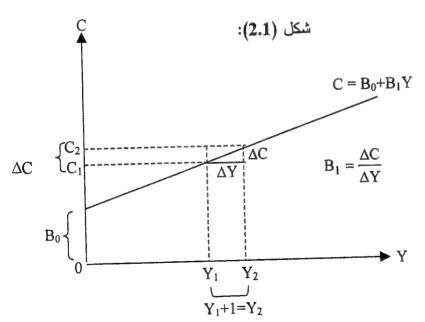
بما ان:

$$\Delta Y = 1$$

<u>:ن:</u>

$$\therefore B_1 = \Delta C$$

ب- بيانبــــأ:



- وتَمْسِماً على ذلك هناك عدة خصائص مرغوب فيها لأي نموذج اقتصادي منها:
- [- مطابقته للنظرية الاقتصادية، بحيث يصف الظاهرة الاقتصادية بشكل صحيح.
- 2- قدرته على توضيح المشاهدات الواقعية، بحيث يكون متناسقاً مع السلوك الفعلي للمتغيرات الاقتصادية التي تحدد العلاقة بين هذه المتغيرات.
- 5- نقته في تقدير المعلمات، ان هذه التقديرات يجب ان تكون أفضل تقريب للمعلمات الحقيقية. وتأتيي هذه الدقة من اتصاف هذه التقديرات بصفات مرغوبة يحددها الاقتصاد القياسي مثل خاصية عدم التحيز، Unbaise، وكفاءتها.
- ◄ قدرة النموذج الاقتصادي على التنبؤ، بحيث يعطي تنبؤات مرضية للقيم المستقبلية للمتغير ات المعتمدة.
- ٤- خاصية البساطة، إذ ان النموذج الاقتصادي يجب ان يبرز العلاقات الاقتصادية بأقصى حد ممكن من البساطة، فكلما قلّت عدد المعادلات وكان شكلها الرياضي ابسط اعتبر النموذج الاقتصادي أفضل من غيره شريطة ان لا يكون على حساب الدقة في التقدير.

5.1 أنسواع النمساذج:

هناك عدة أنواع من النماذج التي يمكن تصنيفها كالآتي:

1- النماذج الاقتصادية الكلية والجزئية:

- أ- النماذج الاقتصادية الكلية: وهي النماذج التي تتعامل مع المتغيرات الاقتصادية التي تخص الاقتصاد الكلي أي تتصل بالسلوك العام والبنية العامة للاقتصاد كالدخل القومي، الاستثمار العام،...الخ.
- ب- النماذج الاقتصادية الجزئية: وهي النماذج التي تتعامل مع المتغيرات الاقتصادية التي تخص الوحدات الاقتصادية الجزئية كعلاقة العرض والطلب على سلعة معينة.

2- النماذج الاقتصادية الساكنة والمتحركة:

أ- النماذج الاقتصادية الساكنة: وهي النماذج التي لا يكون الزمن أحد متغيراتها أو مؤشراً في تغيير قيم أحد المتغيرات الداخلة فيها، أي بدون فترة ارتداد زمني، وهذا يعني ان لكل متغير قيمة معينة في السنة التي يقع فيها، فمثلاً تكون دالة الطلب الساكنة كالآتي:

 $D_t = f(P_t)$

ب- النماذج الاقتصادية المتحركة: وهي النماذج التي يكون الزمن أحد متغيراتها او مؤسراً في أحد متغيراتها، ان هذه النماذج توضح كيفية تأثير الزمن في المتغيرات الاقتصادية، وتعد هذه النماذج أكثر واقعية، فمثلاً تكون دالة العرض المتحركة كالآتي:

 $S_t = f(P_{t-1})$

أي ان العسرض في السينة الحالية (t) تعتمد على سعر السلعة في السنة السابقة (t-1) ويسمى المتغير الحركي بمتغير مرتد زمنياً مثل (P_{t-1}) .

6.1 مكونات النموذج:

أولاً: معادلات النموذج:

يستكون النموذج الاقتصادي من مجموعة من المعادلات تسمى هذه بالمعادلات الهيكلية لأنها توضيح الهيكل الأساس للنموذج المراد بناؤه، وتختلف عدد المعادلات من نموذج لآخر تبعاً لنوع النموذج والهدف من بنائه. وتتقسم المعادلات الهيكلية إلى:

- المعدلات السلوكية: هي المعادلات التي تعبّر عن العلاقات الدالية بين المتغيرات الاقتصدية ويمكن التعبير عنها بدالة ذات متغير مستقل واحد أو عدة متغيرات مستقلة.

- المعادلات التعريفية او المتطابقات: هي المعادلات التي تعبر عن علاقة اقتصادية ناتجة عن تعاريف متفق عليها أو هي العلاقة التي تحدد قيمة المتغير التابع بتحديد تعريف له في صورة علاقة مساواة.

ثانياً: متغيرات النموذج:

- المتغيرات الداخلية: وهي المتغيرات التي تؤثر في النموذج وتتأثر به، وتتحدد قيمتها من داخل النموذج عن طريق المعاملات وقيم المتغيرات الخارجية وتسمى هذه المتغيرات (الداخلية) أيضاً بالمتغيرات التابعة.
- المتغيرات الخارجية: وهي المتغيرات التي تؤثر في النموذج ولا تتأثر به، وتتحدد قيمها عن قيمتها بعوامل خارجة عن النموذج وفي بعض الأحيان تتحدد قيمها عن طريق نموذج آخر مختلف عن النموذج الأصلي وتسمى هذه المتغيرات (الخارجية) بالمتغيرات المستقلة.
- المتغيرات المرتدة زمنية سابقة أو التي تنتمي إلى فترة زمنية سابقة أو التي تؤخد قديمها مدن الفترة السابقة مثل (Y_{t-1}) التي تمثل دخل السنة الماضية.

7.1 منهجية الاقتصاد القياسي، Methodology of Economics:

يه تم الاقتصاد القياسي بقياس معاملات، Coefficients، النموذج المستخدم في التقدير والتنبؤ لقيم المتغيرات الاقتصادية، وهذا يتطلب إتباع منهجية معينة في البحث، لان العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية سببية، Causal، أي بمعنى ان التغير

في بعض المتغيرات يحدث أثراً في المتغيرات الآخرى، ويمكن تحديد هذه المنهجية بالخطوات الآتية:

1- مرحلة التوصيف، Specification Stage:

تعد مرحلة توصيف (صياغة) النموذج من أهم مراحل بناء النموذج وأصعبها وذلك من خلال ما تتطلبه من تحديد للمتغيرات التي يجب ان يشتمل عليها النموذج أو التسي يجسب استبعادها منه. وفي هذه المرحلة يتم الاعتماد على النظرية الاقتصادية الاقتصادية الرياضي لتحويل العلاقة المذكورة إلى معادلات رياضية باستخدام الرموز فسي تحديد نوع واتجاه العلاقة بين المتغيرات الاقتصادية، كما يتم الاعتماد على الرياضية مثل العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما (P_x) والدخل (Y) حيث تصاغ العلاقة أعلاه كالآتي:

$$D_x = B_0 + B_1 P_x + B_2 Y \qquad(3.1)$$

فمن نظرية الطلب يتوقع الحصول على إشارة سالبة للمعامل B_1 وذلك لوجود علاقة عكسية بين الكمية المطلوبة من سلعة ما وسعرها حسب النظرية الاقتصادية وإشارة موجبة للمعامل B_2 لوجود علاقة طردية بين الكمية المطلوبة ودخل المستهلك، كما يتم هنا جمع البيانات الخاصة بمتغيرات النموذج.

2- مرحلة التقدير، Estimation Stage:

في هذه المرحلة يتم جمع البيانات المتعلقة بالظاهرة الاقتصادية (المشكلة) قيد الدراسة ، ومن ثم يتم تقدير معالم العلاقة التي تم وصفها وصياغتها رياضياً في المرحلة الاولى، أي تقدير قيم رقمية للمعالم B_2 ، B_1 ، B_0 في دالة الطلب أعلاه كما

يجب في هذه المرحلة تقييم المعالم المقدرة من النواحي الاقتصادية والإحصائية والقياسية.

فمن الناحية الاقتصادية تجري عملية مقارنة بين قيم وإشارات معالم النموذج التسي تم تقديرها مع القيم والإشارات المتوقعة لهذه المعالم في ضوء النظرية الاقتصادية.

ومن الناحية الإحصائية يتم حساب الانحرافات الكلية والجزئية في المتغيرات التي يتكون منها النموذج واختبار معنوية المعالم من خلال اختبار (t) ومعامل التحديد (R2).

أما من الناحية القياسية فيتم اختبار مدى انسجام وتحقق الفروض الخاصة بالمتغير العشوائي على النموذج القياسي المقترح حيث ان وجود الاختلاف يعني وجود مشاكل منها مشكلة الارتباط الذاتي، التعدد الخطي، وعدم ثبات تجانس التباين والتي سيتم التعرف على كلا منها بشكل مفصل وبفصل خاص لكل منها في الفصول اللحقة.

3- مرحلة الاختبار، Testing Stage:

في هذه المرحلة يتم اختبار قوة ومعنوية النموذج المقدر باعتماد طرق إحصائية معينة للتأكد من صلاحية النموذج وقدرته على التنبؤ. وقد يواجه الباحث هنا عدة مشاكل منها مشكلة تغاير حد الخطأ أو الارتباط الذاتي أو الازدواج الخطي وغيرها من المشاكل، وعلى الباحث ان يعالج هذه المشاكل قبل البدء بعملية التقييم.

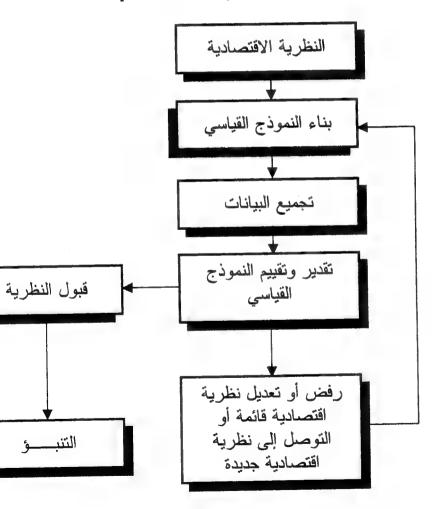
4- مرحلة التنبؤ، Prediction Stage

لا يوجد من يعترض على ضرورة النتبؤ بالمستقبل والنعرف عليه مسبقاً قبل قدومه وعلى مختلف المستويات- الكلية والجزئية- وفي مختلف المجالات الاقتصادية والاجتماعية ولمختلف المدد القصيرة والمتوسطة والطويلة، عليه يتم في هذه المرحلة

أعداد تقديرات مستقبلية للمتغيرات المدروسة كحجم الطلب على السلعة (D_x) في مثالنا السابق.

ولكن قبل استخدام النموذج المقدر في التنبؤ يجب التأكد من جودة الأداء العام للسنموذج المقدر، وبعدئ يستم تطبيق النتائج التي تم التوصل إليها على الواقع واستخدامها في عملية التنبؤ. ويمكن توضيح منهجية البحث في الاقتصاد القياسي كما مبين في الشكل (2.1).

الشكل (3.1): منهجية البحث في الاقتصاد القياسي.



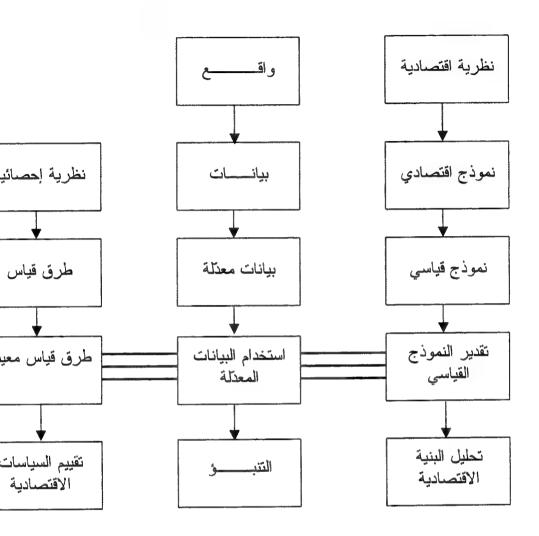
8.1 أسلوب الاقتصاد القياسي، Econometrics Approach

يعتمد أسلوب الاقتصاد القياسي على النظرية الاقتصادية التي تزوده بالنماذج الاقتصادية التي تستخدم في تكوين النماذج القياسية، ولغرض تقدير أو تقييم النماذج القياسية ووضعها في شكل كمي، يعتمد الاقتصاد القياسي على الواقع الذي تستقي منه المعلومات والبيانات اللازمة لعملية التقدير ومن ثم يقوم بعملية التصحيح أو تعديل البيانات المستقاة من الواقع وتهيئتها للاستخدام.

وبعدها يعود الاقتصاد القياسي إلى نظرية الإحصاء بغرض تطوير واستنساخ طرق القياس وبذلك يكون تحت التصرف نموذج قياسي مع بيانات صالحة للاستخدام مسع طرق القياس ومن ثم يتم استخدام هذه الإمكانيات في تقدير معلمات أو معاملات النموذج القياسي الذي يجسد العلاقات الاقتصادية.

ومن شم يمكن استخدام هذا النموذج الذي تم تقديره ، أما في تحليل البنية الاقتصادية أو في التنبؤ أو في تقييم السياسات الاقتصادية، ويمكن عرض ذلك بشكل توضيحي من خلال الشكل (4.1).

الشكل (4.1): أسلوب الاقتصاد القياسي.



أسئلة الفصل الأول

السوال 1.1: ناقش الخصائص المرغوبة في النموذج الاقتصادي القياسي مستعيناً بالمعادلات كلما كان ذلك ممكناً.

السؤال 2.1: ما هي وظائف مادة الاقتصاد القياسي؟ وكيف تختلف عن وظائف المواد القريبة منها.

السوال 3.1: ما هو أسلوب الاقتصاد القياسي؟

السؤال 4.1: ما هي منهجية البحث في الاقتصاد القياسي.



الفصل الثاني: الاتحدار الخطى البسيط

Simple Linear Regression

- 1.2 المقدمة.
- 2.2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي.
 - 3.2 طريقة المربعات الصغرى، OLS.
- 1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:
 - 1.1.3.2 طريقة الحذف.
 - 2.1.3.2 طريقة المحددات.
- 3.1.3.2 طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.
 - 4.1.3.2 طريقة المصفوفات.
- 2.3.2 الخواص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى.
 - 1.2.3.2 الخاصية الخطية.
 - 2.2.3.2 خاصية عدم التحيز.
 - 3.2.3.2 خاصية أفضل مقدر.
 - 4.2 تقدير تباين حد الخطأ العشوائي.
 - 5.2 الأسئلة والتمارين.

الفصل الثاني: الانتحدار الخطي البسيط Simple Linear Regression

1.2 مقدم_____ة:

$$Y = F(x) \qquad \dots (1.2)$$

حيث يشير الرمز F الى كون المتغير التابع Y يعتمد على المتغير المستقل X. ولتحديد شكل العلاقــة هــذه – مــا إذا كان خطياً أم غير خطي – يمكن الاستعانة بالنظرية الاقتصــادية، كمــا يستعان بالاقتصاد الرياضي والإحصاء لصياغة العلاقة واختبار المتغيرات، كما لابد من تحديد شكل العلاقة هذه إذ تحكم العلاقة بين المتغيرات بعدد من الأشكال (الصيغ) ابسطها وأكثرها شيوعاً الصيغة الخطية، وتسمى العلاقة الخطية بيــن متغيرين بالانحدار الخطي البسيط، Simple Linear Regression، فالعلاقة الخطية بين X ولتكن دخل الأسرة و Y ولتكن الأنفاق على سلعة معينة يمكن ان تكتب بالصيغة الرياضية الآتية:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i$$
 ...(2.2)

حيث :

النظر B_0 و B_0 عـبارة عـن معلمـات مجهولة القيم وثوابت يُشرحان من وجهة النظر قرياضية كالآتى:

التي القيمة التي عبارة عن القيمة التي B_0 : تميثل تقاطع خيط الانحدار مع المحور العمودي وهي عبارة عن القيمة التي تتخذها Y عندما تكون قيمة X مساوية للصغر.

:B: تمثل الميل.

ومن وجهة النظر الاقتصادية تمثل (B_0) حالة الكفاف و (B_1) الميل الحدي للاستهلاك، وقيمة الميل عبارة عن مقدار الزيادة المتحققة في قيمة المتغير التابع Y نتيجة زيادة المتغير المستقل بمقدار وحدة واحدة.

غير ان العلاقة أعلاه (2.2) لا يمكن ان تشرح العلاقة بين المتغيرين بشكل نقيق، فهناك أسباب مهمة تجعل هذه المعادلة غير معبرة عن العلاقة بين لا ولا تعبيراً كاملاً فقد يكون هناك انحراف بين العلاقة الحقيقية والمعادلة الإحصائية التي تمناها نتيجة أخطاء في القياسات أو في اختيار المتغير المستقل، مما يتطلب إضافة متغير جديد يسمى بالحد العشوائي، Random Variable ويرمز له عادة بالرمز (U) ودوره امتصاص العوامل غير القابلة للقياس، وكذلك أخطاء القياس، عليه فان العلاقة من الصيغة (2.2) يجب ان تعدل لكي تضم حد الخطأ العشوائي حيث يصبح:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$
 ...(3.2)

2.2 الفرضيات الخاصة بالمتغير العشوائي:

1 ان المتغير العشوائي (U_i) هو متغير تعتمد قيمته في أية فترة زمنية على عامل الصدفة، فقد تكون اكبر أو اصغر أو مساوية إلى الصفر، إلا أنها في المتوسط تساوي صفر، أي $E(U_i)=0$ ، ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتى:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$
 ...(4.2)

$$U_{i} = Y_{i} - B_{0} - B_{1}X_{i} \qquad ...(5.2)$$

وبإدخال كي على طرفي المعادلة 5.2:

$$\sum U_i = \sum (Y_i - B_0 - B_1 X_i)$$

$$\sum U_i = \sum Y_i - nB_0 - B_1 \sum X_i \qquad \dots (6.2)$$

$$:: B_0 = \overline{Y} - B_1 \overline{X}$$

نعوض عن B_0 بما يساويها في المعادلة (6.2):

$$\sum U_i = \sum Y_i - n(\overline{Y} - B_1 \overline{X}) - B_1 \sum X_i \qquad \dots (7.2)$$

$$\because \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} , \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

وبحاصل ضرب الطرفين في الوسطين نحصل:

$$\sum Y_i = n\overline{Y}$$
 , $\sum X_i = n\overline{X}$

وبالتعويض عن ذلك في المعادلة (7.2) تكون:

$$\sum U_i = \sum Y_i - \sum Y_i + B_1 \sum X_i - B_1 \sum X_i$$
$$\sum U_i = 0$$
$$E(U_i) = 0$$

Normally distributed ، يتوزع توزيعاً طبيعياً، (U_i) يتوزع توزيعاً طبيعياً، -2 حــول القيمة المتوقعة أو حول الوسط الحسابي المساوي للصفر عند كل قيمة من قيم المتغير المستقل X أي بشكل جرس.

3- ان تباين، Variance، المتغير العشوائي (حد الخطأ)، حول الوسط الحسابي مقدار ثابت عند كل قيمة من قيم X أي:

$$var(U_i) = E[U_i - E(U_i)]^2$$

$$\therefore E(U_i) = 0$$

$$\therefore \text{var}(U_i) = E(U_i)^2 = 6^2$$

وإذا كان تباين الخطأ غير ثابت عندئذ تظهر مشكلة تسمى مشكلة عدم تجانس التباين، Heteroscedasticity، والتي سنتناولها بشيء من التفصيل لاحقاً.

الفرضيات الثلاث السابقة يمكن جمعها بشكل مختصر وتمثيلها كالآتي:

$$U_i \sim N(0, \sigma^2)$$

مساوي للصفر، 0، وتباين ثابت قيمته σ^2 . σ^2 σ^2

أي بمعنى ان الخطا العشوائي، ¿U، يتوزع، ~، توزيعاً طبيعياً، N، بوسط حسابي

بين U_i و X_i أي:

$$Cov(U_iX_i) = E(U_iX_i)$$

$$Cov(U_iX_i) = X_i E(U_i)$$

$$:: E(U_i) = 0$$

$$\therefore Cov(U_i X_i) = 0$$

ويمكن توضيح ذلك على النحو الآتى:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$
 ...(8.2)

$$U_{i} = Y_{i} - B_{0} - B_{1}X_{i} \qquad ...(9.2)$$

وبضرب طرفى المعادلة ب $\sum X_i$:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - B_0 \sum X_i - B_1 \sum X_i^2$$

$$:: \mathbf{B}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \mathbf{B}_1 \overline{\mathbf{X}}$$

وعند تعويض ذلك:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i (\overline{Y} - B_1 \overline{X}) - B_1 \sum X_i^2 \qquad \dots (10.2)$$

$$\therefore \overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} , \overline{X} = \frac{\sum X_i}{n}$$

وبتعويض ذلك يكون:

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i \left(\frac{\sum Y_i}{n} - B_1 \frac{\sum X_i}{n} \right) - B_1 \sum X_i^2$$

$$\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i \left(\frac{\sum Y_i - B_1 \sum X_i}{n}\right) - B_1 \sum X_i^2$$

 $\sum X_i U_i = \sum X_i Y_i - \sum X_i Y_i + B_1 \sum X_i^2 - B_1 \sum X_i^2$ وبعد الحذف والتبسيط يكون:

$$\sum X_i U_i = 0$$

5- القيم المختلفة للمتغير العشوائي (U_i) تكون مستقلة عن بعضها البعض بعبارة أخرى التباين المشترك لي U_i مع U_j مساوية للصغر، وعليه فان قيمة العنصر العشوائي في أي فترة لا تعتمد على قيمته في فترة أخرى أي:

Cov
$$(U_i U_j) = E(U_i U_j) = 0$$
 $(i, j = 1,2,3,...,n, i \neq j)$

وإذا حدث وجود ارتباط بينها تظهر مشكلة تسمى مشكلة الارتباط الذاتي، Autocorrelation، وسيتم شرحها لاحقاً.

6- انعدام العلاقة بين المتغيرات المستقلة وفي حالة وجود علاقة قوية بينها تظهر مشكلة تسمى مشكلة الارتباط الخطي المتعدد، Multicollinearity، والتي سيتم تناولها فيما بعد.

3.2 طريقة المربعات الصغرى،

:The Ordinary Least Squares (OLS)

بالرجوع إلى العلاقة الخطية بين دخل الأسرة X وانفاقها على سلعة معينة $Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$...(11.2)

يتبيان لا بان تأثير الدخل في الأنفاق على السلعة موضوع البحث يتحدد من خلال العلاقة المنتظمة $(B_0 + B_1 X_1)$ ، أما تأثير العوامل الأخرى فانه متجسد في (U_i) . وعليه فانه لمعرفة العلاقة الحقيقية بين دخل الأسرة وانفاقها على السلعة في القطر يتطلب احتساب B_0 و B_1 ، إلا أن احتساب المعالم المذكورة لا يمكن ان يتم إلا في حالة الحصول على دخل وانفاق جميع الأسر في ذلك القطر وهذا أمر غير ممكن

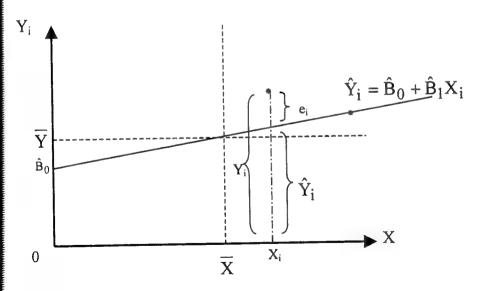
بسبب صعوبة العملية الإحصائية اللازمة ولتسهيل العمل تسحب عينة من أسر القطر، ومن ثم تقدر قيم المعالم ويتم التقدير بواسطة المعادلة:

$$Y_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i + e_i$$
 ...(12.2)

ولتقدير تأثير الدخل بصورة مستقلة في الإنفاق فانه يتم بواسطة المعادلة التالية:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$
 (13.2) معادلة خط الانحدار، وتشير العلامة (^) إلى كون القيم تسمى المعادلة وكل نقطة من نقاطه (\hat{Y}_i) تمثل القيمة التقديرية لمتوسط إنفاق جميع العوائل ذات الدخل البالغ X . ويتبين من المعادلتين (12.2) و (13.2) بأن قيم المشاهدات الفعلية Y_i تنحرف عن القيم التقديرية (\hat{Y}_i) بمقدار P_i وكما مبين في الشكل الآتى:

شكل (1.2)



من الشكل يتبين ان:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

حيث يمكن للبواقي، e_i ان تكون سالبة أو موجبة حسب موضع نقطة المشاهدة من أخط المقدر. و لإيجاد افضل خط مستقيم لعينة مشاهدات X ، X من بين خطوط X نهائية العدد تصف المعادلة الخطية، تستخدم طريقة المربعات الصغرى (OLS)، نهائية العدد تصف المعادلة الخطية، تستخدم طريقة المربعات الصغرى (Y_i عن القيم ويتضمن ذلك في محاولة جعل مجموع مربع انحرافات القيم الحقيقية Y_i عن القيم التقديرية \hat{Y}_i اقل ما يمكن، أي جعل مجموع مربعات الأخطاء العشوائية عند نهايتها الصغرى وبما ان طريقة OLS تشترط تصغير القيمة (Σe_i^2) إلى الحد الأدنى فأنها عبارة عن مشكلة النهايات الصغرى أي:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_i^2$$

حبث ان:

$$e_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

إذن:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

بما ان معادلة الخط المستقيم الحقيقية غير المعروفة هي:

$$\mathbf{Y_i} = \mathbf{B_0} + \mathbf{B_1} \mathbf{X_i}$$

فان معادلة الخط المستقيم التقديرية تكون:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i} = \hat{\mathbf{B}}_{0} + \hat{\mathbf{B}}_{1} \mathbf{X}_{i}$$

بالتعويض عن \hat{Y}_i بما يساويها نحصل:

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)^2$$

 $\hat{\mathrm{B}}_{1}$ و كشرط رياضىي لتصغير $\Sigma \mathrm{e}_{i}^{2}$ تؤخذ المشتقات الجزئية لكل من $\hat{\mathrm{B}}_{0}$ و ومساواة كل منها بالصفر .

وان الشرط الجوهري للتصغير هو اخذ التفاضل الجزئي لمجموع المربعات بالنسبة لمعاملات، Coefficient، السنموذج $\hat{\mathrm{B}}_{1}$ و مساواة المشتقة الأولى بالصفر.

أي بتطبيق الشرط الضروري:

$$\begin{split} \frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_0} &= 2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) (-1) = 0 \\ &- 2 \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0 \\ &\text{ . القسمة على (-2) وفك القوس وترتيب المعادلة نحصل على:} \end{split}$$

$$\sum (Y_{i} - \hat{B}_{0} - \hat{B}_{1}X_{i}) = 0$$

$$\sum Y_{i} - n\hat{B}_{0} - \hat{B}_{1}\sum X_{i} = 0$$

$$\sum Y_{i} = n\hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}\sum X_{i} \qquad \dots (14.2)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{\beta}_1} = 2\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i)(-X_i) = 0$$
$$-2\sum X_i (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_i) = 0$$

بالقسمة على (2-) نحصل على:

$$\sum X_{i}(Y_{i} - \hat{B}_{0} - \hat{B}_{1}X_{i}) = 0$$

$$\sum X_{i}Y_{i} - \hat{B}_{0} \sum X_{i} - \hat{B}_{1} \sum X_{i}^{2} = 0$$

$$\sum X_{i}Y_{i} = \hat{B}_{0} \sum X_{i} + \hat{B}_{1} \sum X_{i}^{2} \qquad ...(15.2)$$

تسمى المعادلتين (14.2) و (15.2) بالمعادلتين الطبيعيتين (الآنيتين) حيث (n) عدد المشاهدات، X_i هي معلومة دائماً باعتبار هما قيم المشاهدات الحقيقية وبمجرد

تعويضهما في المعادلتين (14.2) و(15.2) وبحلهما آنياً نحصل على قيم \hat{B}_0 و \hat{B}_1 اللتان تمثلان مقدرتان للمعلمتين الحقيقيتين \hat{B}_0 و \hat{B}_1

1.3.2 طرق تقدير معاملات النموذج:

ولتقدير معاملات النموذج B_0 و B_1 نستعين بعدة طرق منها:

- 1- طريقة الحذف والتعويض.
 - 2- طريقة المحددات،
- 3- طريقة التقدير حول نقطة المتوسط.
 - 4- طريقة المصفوفات.

وسنبين هذه الطرق من خلال المثال الآتي، من دون تكرارها هنا وهناك. معثال 1.2: الجدول الآتي يمثل عدد سنوات الخدمة (X_i) ومعدل الأجر السنوي (Y_i) بآلاف الدنانير لعينة تمثل (8) موظفين في أحد الدوائر.

Xi	Y _i	$X_i Y_i$	X_i^2
4	25.6	102.4	16
8	32.7	261.6	64
12	45.4	544.8	144
16	53.9	862.4	256
20	59.0	1180	400
24	62.6	1502.4	576
28	65.0	1820	784
32	65.5	2105.6	1024
$\sum_{i} X_{i} = 144$	-	$\sum X_i Y_i = 8379.2$	$4\sum X_i^2 = 326$
$\overline{X} = 18$	$\overline{Y} = 51.25$		

المطلوب: تقدير خط الانحدار بواسطة المعادلتين الطبيعيتين أعلاه.

1.1.3.2 طريقة الحذف والتعويض، Substitution Method:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$
 ...(16.2)

$$\sum X_{i} Y_{i} = \hat{B}_{0} \sum X_{i} + \hat{B}_{1} \sum X_{i}^{2} \qquad ...(17.2)$$

وبتعويض القيم من الجدول في المعادلتين 16.2، 17.2 نحصل على:

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144\hat{B}_1 \qquad \dots (18.2)$$

$$8379.2 = 144\hat{B}_0 + 3264\hat{B}_1 \qquad \dots (19.2)$$

وبضرب المعادلة (18.2) في 18 نحصل:

$$7380 = 144\hat{B}_0 + 2592\hat{B}_1 \qquad ...(20.2)$$

$$8379.2 = 144\hat{B}_0 + 3264\hat{B}_1 \qquad \dots (21.2)$$

وبطرح معادلة (20.2) من (21.2) نحصل:

$$999.2 = 672\hat{B}_1$$

$$\hat{B}_1 = \frac{999.2}{672} = 1.486904762$$

للحصول على قيمة \hat{B}_0 نعوض عن قيمة \hat{B}_1 في أحد المعادلتين الرئيستين ولتكن معادلة (18.2).

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144\hat{B}_1$$

$$410 = 8\hat{B}_0 + 144(1.486904762)$$

$$410 = 8\hat{B}_0 + 214.1142857$$

$$410 - 214.1142857 = 8\hat{B}_0$$

$$195.8857143 = 8\hat{B}_0$$

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \frac{195.8857143}{8} = 24.48571429$$

وعليه فان المعادلة المقدرة ، Estimated، للعلاقة بين عدد سنوات الخدمة X_i ومعدل الأجر السنوى Y_i للعينة المعنية تكون:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762 X_i$$

تشير المعادلة التقديرية إلى وجود علقة طردية بين المتغير التابع Y_i الذي يمثل معدل الأجر السنوي للموظف والمتغير المستقل X_i الذي يمثل عدد سنوات الخدمة فيزيران غدمت الوظيفية بمقدار سنة واحدة يزداد معدل اجره السنوي بمقدار 1486 دينار.

2.1.3.2 طريقة المحددات، Determinates Method

ويمكن الحصول على قيم \hat{B}_0 و \hat{B}_1 باعتماد المحددات (قاعدة كرايمر) وذلك بإعادة كتابة المعادلتين الطبيعيتين (16.2) و(17.2) في صيغة مصغوفة وعلى النحو الآتى:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$

$$\sum X_i Y_i = \hat{B}_0 \sum X_i + \hat{B}_1 \sum X_i^2$$

$$\begin{bmatrix} \sum Y_{i} \\ \sum X_{i} Y_{i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_{i} \\ \sum X_{i} & \sum X_{i}^{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_{0} \\ \hat{B}_{1} \end{bmatrix}$$

ولتقدير $\hat{\mathrm{B}}_{0}$ وينبغي تكوين المحددات الأتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = (n)(\sum X_i^2) - (\sum X_i)(\sum X_i)$$

$$|A_0| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = (\sum Y_i)(\sum X_i^2) - (\sum X_i Y_i)(\sum X_i)$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = (n)(\sum X_i Y_i) - (\sum X_i)(\sum Y_i)$$

$$\hat{B}_{1} = \frac{|A_{1}|}{|D|} = \frac{n(\sum X_{i}Y_{i}) - (\sum X_{i})(\sum Y_{i})}{n(\sum X_{i}^{2}) - (\sum X_{i})^{2}}$$

$$\hat{B}_{0} = \frac{|A_{0}|}{|D|} = \frac{(\sum Y_{i})(\sum X_{i}^{2}) - (\sum X_{i}Y_{i})(\sum X_{i})}{n(\sum X_{i}^{2}) - (\sum X_{i})^{2}}$$
or

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{X}}$$

 \hat{B}_{1} و \hat{B}_{0} و المحددات نحصل على قيم و (1.2) وباعتماد المحددات نحصل على قيم و \hat{B}_{0} و \hat{B}

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{vmatrix}$$

$$|D| = (8)(3264) - (144)(144)$$

$$|D| = 26112 - 20736$$

$$|D| = 5376$$

$$|A_o| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_i \\ \sum X_i Y_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 410 & 144 \\ 8379.2 & 3264 \end{vmatrix}$$

$$|A_0| = (410)(3264) - (144)(9379.2)$$

$$|A_o| = 1338240 - 1206604.8$$

$$|A_0| = 131635.2$$

$$|A_1| = \begin{vmatrix} n & \sum Y_i \\ \sum X_i & \sum X_i Y_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 410 \\ 144 & 8379.2 \end{vmatrix}$$

$$|A_1| = (8)(8379.2) - (410)(144)$$

$$|A_1| = 67033.6 - 59040$$

$$|A_1| = 7993.6$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|A_0|}{|D|} = \frac{131635.2}{5376} = 24.48571429$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|A_1|}{|D|} = \frac{7993.6}{5376} = 1.486904762$$

وبذلك تكون المعادلة التقديرية:

$$\hat{Y}_i = 24.4857 + 1.486 X_i$$

3.1.3.2 طريقة التقدير حول نقطة المتوسط:

كما يمكن تقدير \hat{B}_0 و \hat{B}_1 بواسطة انحرافات المتغيرين X_i و X_i عن وسطهما الحسابي \overline{X} و \overline{X} باستخدام فكرة البواقي e_i فبقسمة المعادلة الطبيعية رقم \overline{X} على \overline{X} نحصل:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i \qquad \dots (22.2)$$

$$\frac{\sum Y_i}{n} = \hat{B}_0 \frac{n}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X} \qquad \dots (23.2)$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{X}} \qquad \cdots (24.2)$$

ولإيجاد \hat{B}_1 نعود إلى معادلة الخط المستقيم التقديرية حيث:

$$\hat{Y}_{i} = \hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}X_{i} \qquad ...(25.2)$$

وبطرح المعادلة رقم (23.2) من (25.2) نحصل على:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i} - \overline{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{B}}_{0} + \hat{\mathbf{B}}_{1} \mathbf{X}_{i} - \hat{\mathbf{B}}_{0} - \hat{\mathbf{B}}_{1} \overline{\mathbf{X}}$$

$$\hat{Y}_i - \overline{Y} = \hat{B}_1 X_i - \hat{B}_1 \overline{X}$$

$$\hat{Y}_i - \overline{Y} = \hat{B}_1 (X_i - \overline{X})$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_i$$

$$e_i = y_i - \hat{y}_i$$

$$e_i = y_i - \hat{B}_1 x_i$$

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{B}_1 x_i)^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2\sum (y_i - \hat{B}_1 x_i)(-x_i) = 0$$

بإيجاد المشتقة الجزئية لــ
$$\hat{\mathbf{B}}_1$$
 ومساواتها بالصفر:

...(30.2)

$$-2\sum x_i(y_i - \hat{B}_1x_i) = 0$$

$$\sum x_i(y_i - \hat{B}_1 x_i) = 0$$

$$\sum x_i y_i - \hat{B}_1 \sum x_i^2 = 0$$

$$\sum x_i y_i = \hat{B}_1 \sum x_i^2$$

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \frac{\sum \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i}{\sum \mathbf{x}_i^2} \qquad \dots (31.2)$$

حيث ان:

تمثل مجموع حاصل ضرب انحرافات القيم عن الوسط الحسابي للمتغيرين $\sum x_i y_i$ و $i \cdot Y_i$ و ان $i \cdot Y_i$ تمسئل مجموع مربع الانحرافات لقيم المتغير $i \cdot X_i$ عن وسطه الحسسابي. وعلسيه فسان المعادلتين (24.2) و (31.2) هي المعادلات الأساسية التي تستخدم في أيجاد قيم \hat{B}_0 و \hat{B}_1 بموجب طريقة الانحرافات.

وبالسرجوع إلى بيانات الجدول (1.2) والتعبير عنها بصيغة انحرافات يمكن الحصول على قيم \hat{B}_{1} و \hat{B}_{1} كما يأتي:

Xi	Y _i	Xi	Y_i	x _i y _i	x 2
4	25.6	-14	-25.65	359.1	196
8	32.7	-10	-18.55	185.5	100
12	45.4	-6	-5.85	35.1	36
16	53.9	-2	2.65	-5.3	4
20	59.0	2	7.75	15.5	4
24	62.6	6	11.35	68.1	36
28	65.0	10	13.75	137.5	100
32	68.5	14	14.55	203.7	196
$\sum X_i = 144$ $\overline{X} = 18$	$\sum_{i} Y_{i} = 410$ $\overline{Y} = 51.25$	$\sum \mathbf{x}_{i} = 0$ $\mathbf{x}_{i} = \mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}$	$\sum y_i = 0$ $y_i = Y - \overline{Y}$	$\sum x_i y_i = 999.2$	$\sum x_i^2 = 672$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{999.2}{672} = 1.486904762$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}$$

$$\hat{B}_0 = 51.25 - (1.486904762)(18)$$

$$\hat{B}_0 = 51.25 - 26.76428572$$

$$\hat{B}_0 = 24.48571428$$

$$\therefore \hat{Y}_i = 24.485 + 1.486 X_i$$

4.1.3.2 طريقة المصفوفات، Matrices Method:

إضافة إلى الطرق السابقة فأنه يمكن تقدير قيم \hat{B}_0 و \hat{B}_1 باعتماد صيغة المصفوفات حيث يمكن كتابة المعادلات الطبيعية على شكل مصفوفات، Matrices ومتجهات، Vectors وكما يلى:

نفترض ان هناك علاقة تحتوي على i من المشاهدات من $n \leftarrow 1$ وان هناك عدد من المتغير ات من $K \leftarrow 1$.

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$
 ...(32.2)

$$\begin{split} Y_1 &= B_0 + B_1 X_{11} + B_2 X_{12} + \cdots + B_k X_{1k} + U_1 \\ Y_2 &= B_0 + B_1 X_{21} + B_2 X_{22} + \cdots + B_k X_{2k} + U_2 \\ \vdots &\vdots &\vdots &\vdots &\vdots \\ Y_n &= B_0 + B_1 X_{n1} + B_2 X_{n2} + \cdots + B_k X_{nk} + U_n \end{split}$$

يمكن تمثيل هذه المعادلات بصيغة رمز المصفوفات:

$$\begin{bmatrix} Y_{1} \\ Y_{2} \\ \vdots \\ Y_{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0} \\ B_{1} \\ \vdots \\ B_{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{1} \\ U_{2} \\ \vdots \\ U_{n} \end{bmatrix}$$

$$Y = XB + U \qquad ...(33.2)$$

حيث ان:

Y: متجه عمودي أبعاده (nx1) يحتوي على n مشاهدة للمتغير التابع Y.

X: مصفوفة أبعادها (n x k+1) تحتوي مشاهدات المتغيرات المستقلة X. وعمودها الأول يحتوي على قيم الواحد صحيح لأخذ الثابت بنظر الاعتبار.

B: متجه عمودي أبعاده (k+1x1) تحتوي المعالم المجهولة.

U: متجه عمودي أبعاده (n x 1) يحتوي الخطأ العشوائي.

وللحصول على تقديرات المربعات الصغرى العادية لمتجه المعلمات يمكن كتابة المعادلة المقدرة التي يراد الحصول عليها وبصيغة المصفوفات كما يلي:

$$Y = \hat{Y} + e$$

$$Y = X\hat{B} + e$$

$$\therefore e = Y - X\hat{B}$$
...(34.2)

وباستخدام المبدلة لـ e .

$$e'e = (Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$$

$$e'e = (Y' - \hat{B}'X')(Y - X\hat{B})$$

$$e'e = Y'Y - \hat{B}'X'Y - Y'X\hat{B} + \hat{B}'X'X\hat{B} \qquad ...(35.2)$$

بما ان الحد الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة، كما وان كل حد يمثل مبدلة للآخر فأن:

$$[\hat{B}'X'Y = (\hat{B}'X'Y)' = \hat{B}XY']$$

 $\therefore e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B}$...(36.2)

$$\hat{\mathbf{B}}' = (\hat{\mathbf{B}}')' = \hat{\mathbf{B}}$$
 ولما كانت

وبأخذ المشتقة الجزئية لــ $\hat{\mathbf{B}}'$ ومساواتها بالصغر:

$$\frac{\partial e'e}{\partial \hat{B}'} = -2X'Y + 2X'X\hat{B} = 0$$

 $2X'X\hat{B} = 2X'Y$

وبقسمة طرفي المعادلة على (2) نحصل:

 $X'X\hat{B} = X'Y$

وبضرب طرفي المعادلة بالمعكوس $(X'X)^{-1}$ نحصل:

$$(X'X)^{-1}X'X\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$$

وبما ان حاصل ضرب المعكوس X'X في المصفوفة X'X يساوي مصفوفة الوحدة، I ، إذن المعادلة أعلاه تصبح:

$$\therefore \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} \qquad \dots (37.2)$$

حيث ان:

. تمثل معاملات الانحدار المطلوب تقدير ها $\hat{\mathbf{B}}$

(X'X): تمثل معكوس المصفوفة (X'X).

X'Y: تمثل المتجه.

وبالسرجوع إلى البيانات الواردة في الجدول (1.2) وباعتماد صيغة المصفوفات يمكن الحصول على قيم \hat{B}_0 وكالآتى:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \\ 1 & 12 \\ 1 & 16 \\ 1 & 20 \\ 1 & 24 \\ 1 & 28 \\ 1 & 32 \end{bmatrix}$$

$$(X'X) = \begin{bmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \operatorname{adj} X'X$$

$$|X'X| = \begin{bmatrix} 8 & 144 \\ 144 & 3264 \end{bmatrix} = (8)(3264) - (144)(144)$$
$$|X'X| = 26112 - 20736$$
$$|X'X| = 5376$$

$$adjX'X = \begin{bmatrix} 3264 & -144 \\ -144 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{5376} \begin{bmatrix} 3264 & -144 \\ -144 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.607142857 & -0.026785714 \\ -0.026785714 & 0.001488095 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 8 & 12 & 16 & 20 & 24 & 28 & 32 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 25.6 \\ 32.7 \\ 45.4 \\ 53.9 \\ 59.0 \\ 62.6 \\ 65.0 \\ 65.8 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 410 \\ 8379.2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.607142857 & -0.026785714 \\ -0.026785714 & 0.001488095 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 410 \\ 8379.2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 248.9285714 & + (-224.4428547) \\ -10.98214274 & + 12.46904562 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24.48571 \\ 1.48690 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_i = 24.485 + 1.486 X_i$$

يتضــح ممــا سبق بأن النتائج التي تم التوصل إليها في المعادلة التقديرية هي نفسها تماماً بالطرق الأربعة الآنفة الذكر.

2.3.2 الخواص الأساسية لمقدرات المربعات الصغرى:

في كل تقدير يتم الحصول عليه، هناك خصائه عدة مرغوب فيها لذلك التقدير، ومن هذه الخصائص خاصية أفضل مقدر خطي غير متحيز، لذلك التقدير، ومن هذه الخصائص خاصية أفضل مقدر (Best Linear Unbiased Estimator (BLUE) فكل مقدر (B) يمكن التعبير عنه كدالة خطية بالنسبة لمشاهدات المتغير التابع (Y)، اي ان:

$$\hat{B} = K_1 Y_1 + K_2 Y_2 + \dots + K_n Y_n$$

حيث ان:

نبحث عن المقدر ات غير المتحيزة، ونقصد بعدم التحيز هو ان يكون الفرق بين القيمة المتوقعة للمقدر وقيمة المعلمة الحقيقية يساوى صغر، أى:

$$E(\hat{B}) - B = 0$$

وأفضل مقدر هو ذلك المقدر الذي يكون تباينه حول الوسط الحسابي اقل مايمكن فإذا \hat{B} همقدر اذا تحققت العلاقة كان \hat{B} مقدر اذا تحققت العلاقة الآتية:

$$var(\hat{B}) < var(\hat{B})$$

وسوف نتناول أدناه هذه الخصائص بشيء من التفصيل:

1.2.3.2 الخاصية الخطية، Linearity Property

مقدرات المربعات الصغرى خطية في المتغير التابع حيث نلاحظ ان تلك المقدرات يمكن وصفها في صورة دالة او ترتيب خطى من قيم المتغير Y، أي:

$$\hat{B}_1 = K_1 Y_1 + K_2 Y_2 + \dots + K_n Y_n$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_1 = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i \mathbf{Y}_i$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_1 = \frac{\sum \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i}{\sum \mathbf{x}_i^2}$$

$$v_i = Y_i - \overline{Y}$$

$$= Y_i - \overline{Y}$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_{1} = \frac{\sum \mathbf{x}_{i} (\mathbf{Y}_{i} - \overline{\mathbf{Y}})}{\sum \mathbf{x}^{2}} = \frac{\sum \mathbf{x}_{i} \mathbf{Y}_{i}}{\sum \mathbf{x}^{2}} - \frac{\overline{\mathbf{Y}} \sum \mathbf{x}_{i}}{\sum \mathbf{x}^{2}}$$

$$\because \sum X_i = \sum (X_i - \overline{X}) = 0$$

$$\therefore \frac{\overline{Y} \sum x_i}{\sum x_i^2} = 0$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i Y_i}{\sum x_i^2} = \sum \left[\frac{x_i}{\sum x_i^2} Y_i \right]$$

ولما كانت قيم
$$X$$
 ثابتة، نجد ان $\frac{X_i}{\sum x_i^2}$ هي مقادير ثابتة، ويمكن ان نرمز لها بالرمز X_i وهي ثابتة في كل العينات، أي:

وان:

لذلك تكون:

للمشاهدة الواحدة

$$K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

 Y_i مجموع مرجح لقيم المتغير التابع، \hat{B}_1

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_1 = \sum \mathbf{K}_i \mathbf{Y}_i$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{F}(\mathbf{Y}_i)$$

إذاً \hat{B}_1 هو مقدر خطي.

خصائص الأوزان، Weighted Properties:

وبما ان الأوزان تعستمد على قسيم X الثابتة فقط فأنها تعتبر ثابتة أيضاً، وتخضع K_i للشروط الآتية:

1- مجموع الأوزان يساوي صفر، اي ان:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i = 0$$

$$\because K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2}$$

إذن:

$$\sum K_i = \frac{\sum x_i}{\sum x_i^2}$$

$$\because \sum \mathbf{x_i} = \sum (\mathbf{X_i} - \overline{\mathbf{X}}) = 0$$

وبالتعويض، فأن:

$$\therefore \sum K_i = \frac{0}{\sum x_i^2} = 0$$

و في المستقل (X_i) المستقل (X_i) المستقل (X_i) المستقل (X_i) المستقل (X_i) المستقل الحسابي (X_i) يساوي الواحد صحيح، أي:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i X_i = \sum_{i=1}^{n} K_i x_i = 1$$

$$\sum K_i x_i = \sum K_i (X_i - \overline{X})$$

 $= \sum K_i X_i - \overline{X} \sum K_i$

و قد بينًا سابقاً ان:

$$\because \sum K_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i x_i = \sum K_i X_i$$

وبما ان:

$$\therefore K_i = \frac{X_i}{\sum X_i^2}$$

إذن:

$$\sum K_i x_i = \sum \frac{x_i}{\sum x_i^2} x_i$$

لذلك تكون:

$$\sum K_i x_i = \frac{\sum x_i^2}{\sum x_i^2} = 1$$

∠ ^_i

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} K_i X_i = \sum_{i=1}^{n} K_i X_i = 1$$

 ΣK_i^2 ، يساوي معكوس مجموع مربعات انحر افات ΣK_i^2

المتغير المستقل،
$$\frac{1}{\sum x_i^2}$$
، أي ان:

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2} = \frac{1}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

وبما ان:

$$K_i = \frac{x_i}{\sum x_i^2} = \frac{(X_i - \overline{X})}{\sum (X_i - \overline{X})^2}$$

وعند تربيع الطرفين، ثم جمعها، يكون:

$$\sum K_i^2 = \frac{\sum (X_i - \overline{X})^2}{\left[\sum (X_i - \overline{X})^2\right]^2}$$

وبعد الاختصار والترتيب:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum (X_i - \overline{X})^2} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

وبطريقة مماثلة يمكن البرهنة بان $\hat{\mathrm{B}}_0$ دالة خطية من قيم المتغير Y .

$$\hat{B}_0 = W_1 Y_1 + W_2 Y_2 + \dots + W_n Y_n$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{W}_i \mathbf{Y}_i$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{X}}$$

وان:

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n}$$
, $\hat{B}_1 = \sum K_i Y_i$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_0 = \frac{\sum Y_i}{n} - \overline{\mathbf{X}} \sum \mathbf{K}_i \mathbf{Y}_i$$

ومن خلال إعادة الترتيب، نحصل:

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \sum \left[\frac{1}{n} - \overline{\mathbf{X}} \mathbf{K}_i \right] \mathbf{Y}_i$$

ولما كانت K_i, \overline{X} مقادير ثابتة، نرمز لها بالرمز W_i ، أي ان:

$$W_{i} = \left[\frac{1}{n} - \overline{X}K_{i}\right]$$

وبتعويض ذلك في المعادلة أعلاه، نجد ان $\hat{\mathbf{B}}_0$ تعتمد على قيم \mathbf{Y}_i فقط، بعبارة أخرى:

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \sum \mathbf{W}_i \mathbf{Y}_i$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{F}(\mathbf{Y}_i)$$

إذن Bô هو مقدر خطي.

2.2.3.2 خاصية عدم التحيز، Unbiasedness Property:

 $E(\hat{B})$ تقصد بعدم التحيز هو ان يكون الفرق بين القيمة المتوقفة للمقدر وقيمة المعلمة الحقيقية للمجتمع الإحصائي (B)، يساوي صفر، أي:

$$E(\hat{B}) - B = 0$$

بعبارة أخرى يعتبر المقدر غير متحيز إذا كان وسطها يساوي القيمة الحقيقية للمعلمة:

$$E(\hat{B}) = B$$

و لاثبات خاصية عدم التحيز بالنسبة \hat{B}_1 نتبع ما يلى:

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \sum \mathbf{K}_i \mathbf{Y}_i$$

من خاصية الخطية

وباستحضار المعادلة:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

وبتعويض ذلك في أعلاه:

$$\hat{B}_1 = \sum K_i (B_0 + B_1 X_i + U_i)$$

وبفتح القوس نحصل:

$$\hat{B}_1 = B_0 \sum K_i + B_1 \sum K_i X_i + \sum K_i U_i \qquad ...(38.2)$$

وباستخدام شروط الأوزان فأن:

$$\sum K_i = 0$$

 $B_0 \sum K_i = 0$

$$\sum K_i X_i = 1$$

وبتعويض ذلك في المعادلة (38.2)، نحصل:

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_1 = \mathbf{B}_1 + \sum \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i \qquad \dots (39.2)$$

وبأخذ توقع طرفى المعادلة:

$$E(\hat{B}_1) = B_1 + \sum K_i E(U_i)$$

من فرضيات الخطأ العشوائي

$$:: E(U_i) = 0$$

 $:: EK_i E(U_i) = 0$

$$\therefore E(\hat{B}_1) = B_1$$
 ...(40.2)

ويعني ذلك ان \hat{B}_1 هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية، B.

إثبات خاصية عدم التحيز لــ B̂₀:

وبنفس المنهجية يمكن البرهنة بأن $\hat{\mathbf{B}}_0$ تعتبر مقدرة غير متحيزة للمعلمة الحقيقية \mathbf{B}_0 .

من الخاصية الخطية بتبين لنا:

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \sum \mathbf{W}_i \mathbf{Y}_i$$

$$W_{i} = \left[\frac{1}{n} - \overline{X}K_{i}\right]$$

وان:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

وعند التعويض نحصل:

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_0 = \sum \left[\frac{1}{n} - \overline{\mathbf{X}} \mathbf{K}_i \right] \left[\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{X}_i + \mathbf{U}_i \right]$$

وعند فك الأقواس والتعويض، نحصل:

$$\hat{B}_0 = B_0 - B_0 \overline{X} \sum K_i + B_1 \overline{X} - \overline{X} B_1 \sum K_i X_i + \sum (\frac{1}{n} - \overline{X} K_i) U_i \quad(41.2)$$

وباستخدام شروط الأوزان:

$$:: \sum K_i = 0$$

$$\therefore B_0 \overline{X} \sum K_i = 0$$

$$\therefore \sum K_i X_i = 1$$

$$\hat{B}_0 = B_0 + \sum (\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)U_i$$
 ... (42.2)

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}_0) = B_0 + \sum (\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)E(U_i)$$

$$:: E(U_i) = 0$$

$$\therefore \sum (\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)E(U_i) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}_0) = B_0 \qquad \dots (43.2)$$

.B0 هو تقدير غير متحيز للقيمة الأصلية، \hat{B}_{o}

3.2.3.2 خاصية افضل مقدر (اقل تباين)، Best Minimum Variance:

 \hat{B} ان مفهوم تبايان المعالم يُحدد بواسطة الانحراف بين المعالم المقدرة لـ \hat{B} وقيمتها المتوقعة $E(\hat{B})$.

فبالنسبة لــ B1 فأن:

$$var(\hat{B}_1) = E[\hat{B}_1 - E(\hat{B}_1)]^2$$
 ...(44.2)

$$m : E(\hat{B}_1) = B_1$$
 من خاصية عدم التحيز

$$var(\hat{B}_1) = E[\hat{B}_1 - B_1]^2$$
 ...(45.2)

بالرجوع إلى المعادلة (39.2) من خاصية عدم التحيز والخاصة ب \hat{B}_1 نجد ان: $\hat{B}_1 = B_1 + \sum K_i U_i$

$$\hat{B}_1 - B_1 = \sum K_i U_i$$

بتربيع الطرفين:

$$(\hat{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B}_1)^2 = (\sum \mathbf{K}_i \mathbf{U}_i)^2$$

وبأخذ توقع طرفي المعادلة:

$$E(\hat{\mathbf{B}}_1 - \mathbf{B}_1)^2 = E(\sum K_i \mathbf{U}_i)^2$$
$$var(\hat{\mathbf{B}}_1) = E[\sum K_i \mathbf{U}_i]^2$$

...(46.2)

وبفك القوس، نحصل:

$$var(\hat{B}_1) = \sum K_i^2 E(U_i)^2 + 2\sum_{i \le i} \sum K_i K_j E(U_i U_j)$$

ومن فرضيات الخطأ العشوائي ان:

$$E(U_i)^2 = \sigma^2$$

وان:

$$E(U_iU_i)=0$$

For all $i \neq j$.

$$\therefore \operatorname{var}(\hat{B}_1) = \sum K_i^2 \sigma^2$$

...(47.2)

$$\therefore K_i = \frac{X_i}{\sum X_i^2}$$

$$\sum K_i^2 = \frac{\sum x_i^2}{(\sum x_i^2)^2} = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$\therefore \operatorname{var}(\hat{B}_1) = \frac{1}{\sum x_i^2} \cdot \sigma^2 = \frac{\sigma^2}{\sum x_i^2}$$

وبالأسلوب نفسه يمكن تحديد التباين لـــ $\hat{\mathrm{B}}_0$ على النحو الآتي:

$$var(\hat{B}_0) = E[\hat{B}_0 - E(\hat{B}_0)]^2$$

...(48.2)

من خاصية عدم التحيز:

$$:: E(\hat{B}_0) = B_0$$

$$var(\hat{B}_0) = E[\hat{B}_0 - B_0]^2$$

وبالسرجسوع إلى المعادلة (42.2) من خاصية عدم التحيز والخاصة ب
$$\hat{B}_0$$
 نجد

$$\hat{B}_0 = B_0 + \sum (\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)U_i$$

$$\hat{B}_0 - B_0 = \sum (\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)U_i$$

$$var(\hat{B}_0) = E\left[\sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X}K_i\right)U_i\right]^2$$

$$var(\hat{B}_0) = \sum (\frac{1}{n} - \overline{X}K_i)^2 E(U_i)^2$$

$$: E(U_i)^2 = \sigma^2$$

$$\therefore \operatorname{var}(\hat{B}_0) = \sigma^2 \left[\sum \left(\frac{1}{n} - \overline{X} K_i \right)^2 \right]$$

ويفك القوس نحصل:

 $var(\hat{B}_0) = \sigma^2(\frac{1}{2} - \frac{2\overline{X}^2}{2} \sum K_i + \overline{X}^2 \sum K_i^2)$

 $\sum K_i = 0$

$$\therefore \frac{2\overline{X}^2}{n} \sum K_i = 0$$

وان:

وباستخدام شروط الأوزان:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum X_i^2}$$

 $\therefore \operatorname{var}(\hat{B}_0) = \sigma^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\nabla v^2}\right)$

ولائـــبات ان مقـــدرات (OLS) هي افضل مقدرات خطية غير متحيزة أي أنها تتسم

بالكفاءة ، ونتيجة لنسبية معيار الأفضلية فأننا نقوم بتعريف مقدرة أخرى ولتكن B₁

تختلف عن مقدرة OLS، حيث سيتضح لاحقاً ان تباين تلك المقدرة $\hat{\mathrm{B}}_1$ لابد وان يفوق تبايس مقدرة $\hat{\mathrm{B}}_1$ ، وبالتالي نفضل المقدرة الأخيرة $\hat{\mathrm{B}}_1$ صاحبة

التباين الأقل.

$$B_1 = \sum C_i Y_i$$
 ...(49.2)

 $C_i = K_i + d_i$ وان $d_i \neq 0$ ، حيث d_i كميات ثابتة.

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

$$B_1 = \sum C_i (B_0 + B_1 X_i + U_i) \qquad ...(50.2)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{B}_0 \sum \mathbf{C}_i + \mathbf{B}_1 \sum \mathbf{C}_i \mathbf{X}_i + \sum \mathbf{C}_i \mathbf{U}_i$$

ولكي تكون
$$\mathbf{B}_1^*$$
 غير متحيزة أي $\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_1=\mathbf{B}_1$ يجب ان تتصف المالتية:

a:
$$\sum C_i = 0$$

 $\therefore \sum C X_i = 1 + 0 + 1$

$$\sum K_i + \sum d_i = 0$$

$$\sum K_i = 0$$
معروفة مسبقاً $\sum d_i = 0$

$$\sum C_i = 0$$
 : أي إن

b:
$$\sum C_i X_i = 1$$

$$\because \sum K_i X_i + \sum d_i X_i = 1$$

او

$$\Sigma K_i X_i = 1$$
نروفة مسبقا

أي ان:
$$\sum d_i X_i = 0$$

$$B_1 = B_1 + \sum C_i U_i$$
 ...(51.2)

$$(B) = B_1 + \sum C_i E(U_i)$$

$$:: E(U_i) = 0$$

$$\therefore \sum C_i E(U_i) = 0$$

$$E(B_1) = B_1$$

 B_1 هـنا المقـدر B_1 غير متحيز ولتحديد تباين هذه المقدرة الخطية غير المتحيزة فعرن عوض في قانون Var.

var
$$B_1 = E \left[B_1 - E(B_1) \right]^2$$

$$: E(B_1) = B_1$$

$$\operatorname{var} \mathbf{B}_{1} = \operatorname{E} \left[\mathbf{B}_{1} - \mathbf{B}_{1} \right]^{2}$$

وباستخدام المعادلة رقم (51.2)

$$B_1 = B_1 + \sum C_i U_i$$

$$B_1 - B_1 = \sum C_i U_i$$

$$\operatorname{var}(B_1) = E[\Sigma C_i U_i]^2$$

وبفك القوس، نحصل على:

var
$$(B_1) = \sum_{i=1}^{8} C_i^2 E(U_i)^2 + 2 \sum_{i=1}^{8} C_i C_j E(U_i U_j)$$

$$E(U_i)^2 = \sigma^2$$

$$E(U_iU_j)=0$$

$$\therefore \operatorname{var}(B_1) = \sum C_i^2 \sigma^2$$

$$\therefore \operatorname{var}(B_1) = \sum C_i^2 \sigma^2$$

$$C_{i} = K_{i} + d_{i}$$

$$var(B_{1}) = \sum (K_{i} + \sum d_{i})^{2} \sigma^{2}$$

$$var(B_1) = \sigma^2 \left[\sum K_i^2 + \sum d_i^2 + 2\sum K_i d_i \right]$$

$$var(B_1) = \sigma^2 \sum K_i^2 + \sigma^2 \sum d_i^2 + 2\sigma^2 \sum K_i d_i$$

$$\therefore \sum_{i} K_{i} = 0$$

$$var(B_1) = \sigma^2 \sum K_i^2 + \sigma^2 \sum d_i^2$$

ومن فرضيات الخطأ العشوائي:

...(55.2)

$$\sum K_i d_i$$

$$s^2 \sum K_i d_i$$

ولما كانت:

$$\sum K_i^2 = \frac{1}{\sum x_i^2}$$

$$var(B_1) = \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2} + \sigma^2 \sum d_i^2$$

$$: \sigma^2 \frac{1}{\sum x_i^2} = \text{var}(\hat{B}_1)$$

$$\therefore \operatorname{var}(\hat{B}_1) = \operatorname{var}(\hat{B}_1) + \sigma^2 \sum_i d_i^2$$

$$\sum d_i^2 > 0$$

$$var(\hat{B}_1) > var(\hat{B}_1)$$

ومــن ثم فأننا نرى ان مقدرة OLS الخاصة بالمعلمة $\hat{\mathbb{B}}_1$ نتميز بأصىغر تباين من بين

المقدرات الخطية غير المتحيزة للمعلمة B₁.

4.2 تقدير تباين حد الخطأ العشوائي:

يستعمل تباين \hat{B}_0 و أجراء الاختبارات المعنوية الخاصة بتلك المقدرات، غير ان تبايل المقدرات يحتوي على معلمة مجهولة هي (σ^2) تباين حد الخطأ العشوائي الذي يرمز له بالرمز (S_e^2) و يمكن اشتقاقه كالآتى:

بما ان المعادلة التقديرية تأخذ الصيغة الآتية:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i \qquad ...(58.2)$$

وبإدخال ∑ على طرفي المعادلة:

وبالقسمة على n:

...(59.2)

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \frac{n}{n} \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

 $\sum \hat{\mathbf{Y}}_{i} = n\hat{\mathbf{B}}_{0} + \hat{\mathbf{B}}_{1} \sum \mathbf{X}_{i}$

$$\frac{-1}{n} = \frac{1}{n}B_0 + B_1 \frac{-1}{n}$$

 $\overline{\hat{Y}} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i} - \overline{\hat{\mathbf{Y}}} = \hat{\mathbf{B}}_{0} + \hat{\mathbf{B}}_{1}\mathbf{X}_{i} - \hat{\mathbf{B}}_{0} - \hat{\mathbf{B}}_{1}\overline{\mathbf{X}}$$

 $\hat{\mathbf{y}}_i = \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{X}_i - \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{X}}$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1(X_i - \overline{X})$$

$$: e_i = y_i - \hat{y}_i$$

 $\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_i$

$$\therefore e_i = y_i - \hat{B}_1 x_i$$

$$e_i^2 = (y_i - \hat{B}_1 x_i)^2$$

و بعد الاختصار، نحصل:

أذن:

وبالتعويض من المعادلة (60.2):

و عند فك الأقواس، نحصل:

$$e_i^2 = y_i^2 + \hat{B}_1^2 x_i^2 - 2\hat{B}_1 x_i y_i$$

وبإدخال ك على طرفي المعادلة:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 + \hat{B}_1^2 \sum x_i^2 - 2\hat{B}_1 \sum x_i y_i \qquad ...(61.2)$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_1 = \frac{\sum \mathbf{x}_i \, \mathbf{y}_i}{\sum \mathbf{x}_i^2}$$

وان حاصل ضرب الطرفين في الوسطين لذلك سيكون:

$$\hat{\mathbf{B}}_1 \sum_{i} \mathbf{x}_i^2 = \sum_{i} \mathbf{x}_i \, \mathbf{y}_i$$

وبالتعويض في المعادلة (61.2) بما يساويها:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 + \hat{B}_1 \sum x_i y_i - 2\hat{B}_1 \sum x_i y_i$$

وبعد الاختصار نحصل:

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i \qquad ...(62.2)$$

وقد جرى تعریف σ^2 على أنها:

$$\sigma^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

وبالتعويض عن البسط من المعادلة 62.2 ، نحصل:

$$\sigma^2 = \frac{\sum y_i^2 - \hat{B}_1 \sum x_i y_i}{n-2} \qquad ...(63.2)$$

و هذا يعنسي ان تباين أخطاء العينة تمثل النسبة بين مجموع مربعات انحرافات القيم المشاهدة عن خط انحدار العينة إلى درجة الحرية للخطأ. وإذا رمزنا إلى التقدير الخطي غير المتحيز لتباين الخطأ بالرمز (S_e^2) ، فأن:

$$S_e^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

 u_i فضل مقدر غير متحيز لتباين المتغير العشوائي أو حد الخطأ، S_e^2

أسئلة الفصل الثانى

السوال 1.2 ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

السؤال 2.2: لنموذج الانحدار الآتى:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + U_t$$

$$U_{t} \sim N(0, \sigma^{2}U)$$
, $E(U_{t}, U_{t}) = 0$

علماً بأن العمليات الحسابية الخاصة بمشاهدات المتغير (Y_t) و (X_t) كانت كالآتى:

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t = 30 , \sum_{t=1}^{5} Y_t^2 = 190 , \sum_{t=1}^{5} Y_t = 12 ,$$

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t^2 = 34 , \quad \sum_{t=1}^{5} X_t Y_t = 74$$

 B_1 و B_0 المطلوب: تقدير كل من

السوال 3.2: ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

السؤال 4.2: ما هو المتغير العشوائي، ولماذا يستخدم في النموذج الاقتصادي.

الفصل الثالث: اختبار الفرضيات، Hypotheses Testing

- 1.3 المقدمة.
- t-Value Test ،t قيمة 2.3
- 3.3 معامل التحديد، R2، Determinant Coefficient.
 - F-Statistics ،F اختبار إحصائية 4.3
- 5.3 معامل الارتباط البسيط، Simple Correlation Coefficient، معامل الارتباط
 - 6.3 حدود الثقة لمعاملات الاتحدار.
 - 7.3 التنبؤ.
 - 8.3 الأسئلة والتمارين.



الفصل الثالث: اختبار الفرضيات، Hypothesis Testing

1.3 المقدمــة:

تناول نا في الفصل السابق، دراسة العلاقة بين متغيرين (الانحدار الخطي البسيط)، وقد بينا صيغ اشتقاق معلمات النموذج بطريقة OLS، وطرق تقدير هذه المعلمات. ولكن المنطق يحتم علينا عدم قبول هذا النموذج إلا بعد أجراء تقييم لهذه النتائج من الناحية الاقتصادية والإحصائية. ويتم هذا باستخدام نتائج التقدير في اختبار النظريات أو اتخاذ القرارات أو وضع السياسات.

سنتناول في هذا الفصل، تقييم نموذج الانحدار المقدر، ولتحقيق ذلك سيتم اختبار المعنوية الاقتصادية والإحصائية لنتائج تقدير نموذج الانحدار.

اختبار الفرضيات، Test of hypothesis:

تعرف الفرضية بأنه ادعاء قابل لأن يكون صحيحاً أو غير صحيح، وتثبت صحتها فقط من خلال الاختبار (Test). وقبل البدء بدراسة الكيفية التي يتم على أساسها اختبار الفرضية، لابد من دراسة العلاقة الاقتصادية التي تستند إلى مجموعه من الفروض الخاصة بالنظرية الاقتصادية، كالعلاقة بين الكميه المطلوبة من سلعه ما وسعر تلك السلعة. وحسب منطق النظرية الاقتصادية تعكس دالة الطلب علاقة عكسية (سالبه) بين المتغير المستقل (السعر) والكميه المطلوبة (المتغير المعتمد).

أما إذا أخذنا العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي والدخل، فأن منطق النظرية يشير إلى ان الميل الحدي للاستهلاك (MPC) يكون موجباً ولكنه اقل من الواحد الصحيح، 0<MPC<1 وان هناك حد أدنى للاستهلاك في الأمد القصير، ولكن لا يمكن الجزم بصحة أو عدم صحة ذلك إلا بعد أخذ البيانات وقياس العلاقة الاقتصادية واختبارها. وهذا ما سنتناوله في المباحث القادمة.

ويختبر نموذج الانحدار قبل كل شيء العلاقة بين المتغير المستقل (X) والتابع (Y) وذلك للتثبت من وجودها من خلال اختبار المعنوية الإحصائية للمعلمات المقدرة \hat{B}_0 و \hat{B}_1 كلاً على انفراد وفي هذا المجال توجد فرضيتان:

1- فرضية العدم: وتنص على عدم وجود علاقة بين المتغيرين X و Y أي ان:

$$H_0: B_0 = 0$$

 $B_1 = 0$

-2 الغرضية البديلة: وتنص على وجود علاقة بين X و Y ، أي ان

 $B_0 \neq 0 H_1$:

 $B_1 \neq 0$

t-Value Test ،t اختبار قيمة 2.3

و لأجل اختبار ما إذا كانت $B_0=0$ ، $B_0=0$ أم لا، يستخدم اختبار $B_1=0$ عند مستوى معنوية معينة ودرجة حرية (n-k) والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

أ- بالنسبة لــ B₁:

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} \qquad ...(1.3)$$

حيث ان:

$$s_{\hat{B}_1} = \sqrt{s_{\hat{B}_1}^2}$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S_{e_i}^2}{\sum x_i^2}$$

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

حيث ان:

(n-k) عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية (n-k) حيث (n-k) عدد المشاهدات في العينة و(k) عدد المعالم.

. القيمة التقديرية ل B_1 الحقيقية \hat{B}_1

 \hat{B}_1 : الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة \hat{B}_1

. $\hat{\mathtt{B}}_1$ تباین : $S^2_{\hat{\mathtt{B}}_1}$

. تباین الخطأ $S_{e_i}^2$

 $\hat{\mathrm{B}}_0$ ب بالنسبة لــ $\hat{\mathrm{B}}_0$ فأن

حيث أن:

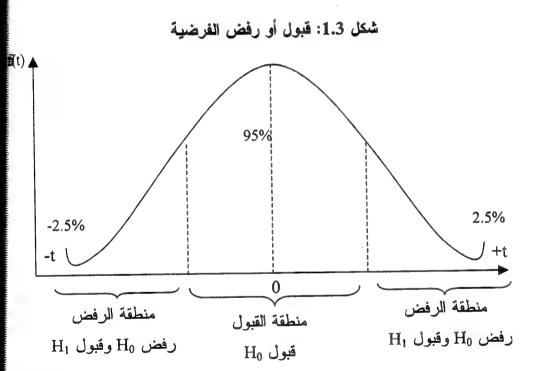
$$t_{\hat{\mathsf{B}}_0} = \frac{\hat{\mathsf{B}}_0}{S_{\hat{\mathsf{B}}_0}}$$

$$s_{\hat{\mathbf{B}}_0} = \sqrt{s_{\hat{\mathbf{B}}_0}^2}$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = S_{e_i}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n - k}$$

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية المعطاة في الجداول الخاصة بها عند درجات حرية (n-2) ومستوى المعنوية المطلوب (5%، 1%) لتحديد قبول أو رفض فرضية فرضية العدم. فإذا كانت قيمة t المحتسبة اكبر من قيمة t الجدولية ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، بمعنى ان المعلمة ذات معنوية إحصائية. وبالعكس في حالمة كون t المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم وترفض الفرضية المحتسبة أي عدم معنوية المعلمة المقدرة. ويمكن توضيح ذلك بالشكل الفرضية المعدم ويرفض. (1.3).



ولاختبار معنوية المعلمات المقدرة $\hat{\mathbf{B}}_0$ و $\hat{\mathbf{B}}_1$ نعود الى بيانات المثال الوارد في (1.2)، وباعتماد الصيغة الرياضية للختبار، فأننا نحتاج الإحصاءات الآتية:

$\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i}}$	e _i	e_i^2
30.43333334	-4.83333334	23.36111118
36.38095239	-3.68095239	13.5494105
42.32857143	3.07142857	9.433673461
48.27619048	5.62380952	31.62723352
54.22380953	4.77619047	22.81199541
60.17142858	2.42857142	5.897959142
66.11904763	-1.11904763	1.252267598
72.06666667	-6.2666667	39.27111115
$\sum \hat{Y}_i = 410$	$\sum e_i = 0$	$\sum e_i^2 = 147.204762$

: $\hat{\mathrm{B}}_{1}$ النسبة الى

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{147.204762}{8-2} = 24.534127$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S_{e_i}^2}{\sum x_i^2} = \frac{24.534127}{672} = 0.036509117$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.036509117} = 0.191073592$$

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{R}_2}} = \frac{1.486904762}{0.191073592} = 7.781843354$$

وبما ان قيمة (t) المحتسبة والبالغة (7.781) اكبر من قيمة (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة أي معنوية المعلمة المقدرة \hat{B}_1 .

ب- بالنسبة إلى B.

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-k} = \frac{147.204762}{8-2} = 24.534127$$

$$S_{\hat{B}_{1}}^{2} = S_{e_{i}}^{2} \left[\frac{1}{n} - \frac{\overline{X}^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \right]$$

$$=24.534127 \left[\frac{1}{8} - \frac{(18)^2}{672} \right]$$

$$= 24.534127 [0.125 - 0.482142857]$$

$$=14.89571996$$

$$S\hat{B}_0 = \sqrt{S^2_{\hat{B}_0}} = \sqrt{14.89571996} = 3.859497372$$

$$t\hat{B}_0 = \frac{\hat{B}_0}{S\hat{B}_0} = \frac{24.48571429}{3.859497372} = 6.344275415$$

وبما ان قيمة (t) المحتسبة عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) هي (6.344) وهي اكبر من مثيلتها الجدولية البالغة (2.45)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة، أي معنوية المعلمة المقدرة $\hat{\mathbf{B}}_0$ عالية.

3.3 معامل التحديد، (R²) Coefficient of Determination

هـو مقياس يوضح نسبة التغير في المتغير التابع (Y) الذي سببها التغيير في المتغير المستقل (X). أي نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار الى الانحرافات الكلية. ويمكن حساب هذا المعامل حسب الصيغ الآتية:

$$R^{2} = \frac{\sum (\hat{Y}_{i} - \overline{Y})^{2}}{\sum (Y_{i} - \overline{Y})^{2}} \qquad ...(3.3)$$

أو

$$R^2 = \frac{\sum \hat{y}_i^2}{\sum y_i^2}$$

أو

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

أو

$$R^2 = r^2$$

أو

$$R^{2} = \frac{\hat{B}_{1}^{2} \sum x_{i}^{2}}{\sum y_{i}^{2}}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

ويمكن توضيح الصيغة الأخيرة من خلال الاشتقاق الآتي:

الانحرافات غير الموضحة + الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار = الانحرافات الكلية

$$\sum (Y_{i} - \overline{Y})^{2} = \sum (\hat{Y}_{i} - \overline{Y})^{2} + \sum (Y_{i} - \hat{Y}_{i})^{2} \qquad ...(4.3)$$

وبقسمة طرفي المعادلة (4.3) على الانحرافات الكلية:

$$\begin{split} \frac{\sum (Y_i - \overline{Y})^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2} &= \frac{\sum (\hat{Y}_i - \overline{Y})^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2} + \frac{\sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{\sum (Y_i - \overline{Y})^2} \\ 1 &= R^2 + \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2} \end{split}$$

$$\therefore R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum y_i^2}$$

$$0 < R^2 < 1$$

وتتراوح قيمة R² بين الصفر والواحد، أي ان:

حيث أن $R^2=1$ عــندما تقــع جمــيع نقاط الانتشار على خط الانحدار المقدر أي $Y_i=\hat{Y}_i$

 $\hat{Y}_i = \overline{Y}$ (أو تقترب منه) عندما يكون خط انحدار العينة خطأ أفقياً أي $R^2 = 0$ ، ومعنى ذلك $Y_i = \overline{Y}$ علاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل.

وكل من هاتين الحالتين نادرة الحدوث، ففي الأحوال العادية يفسر خط الانحدار جنزءاً من التغيرات في Y وبالتالي يكون هناك جزءاً آخر غير مفسر بواسطة الخط ومن ثم نجد في أغلب الحالات $1 > R^2 < 0$.

Y ولمعرفة مقدار ما يفسره المتغير المستقل، X من التغير في المتغير التابع، R^2 نعود إلى مثالنا الوارد في (1.2), وبالاعتماد على الصيغ الرياضية الخاصة بفان:

$\hat{\mathtt{y}}_{\mathrm{i}}$	\hat{y}_{i}^{2}	y _i ²
-20.81666666	433.3336108	657.9225
-14.86904761	221.0885768	344.1025
-8.92142857	79.59188773	34.2225
-2.97380952	8.843543061	7.0225
2.97380953	8.843543121	60.0625
8.92142858	79.59188791	128.8225
14.86904763	221.0885774	189.0625
20.81666667	433.3336113	211.7025
$\sum \hat{y}_i = 0$	$\sum \hat{y}_i^2 = 1485.715238$	$\sum y_i^2 = 1632.92$

$$R^{2} = \frac{\sum \hat{y}_{i}^{2}}{\sum y_{i}^{2}} = \frac{1485.715238}{1632.92} = 0.909851822 = \%90.98$$

هـذا يعني ان المتغير المستقل، X_i , يفسر حوالي 90.98% من التغيير الحاصل في المتغير التابع، Y_i , وان النسبة الباقية والبالغة 9.02% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة.

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

$$R^{2} = \frac{(1.486904762)(999.2)}{1632.92} = \frac{1485.715238}{1632.92}$$

 $R^2 = 0.909851 = \%90.98$ or:

$$R^{2} = \frac{\hat{B}_{1}^{2} \sum x_{i}^{2}}{\sum y_{i}^{2}}$$

$$R^{2} = \frac{(1.486904762)^{2}(672)}{1632.92} = \frac{(2.210885771)(672)}{1632.92}$$

$$R^{2} = \frac{1485.715238}{1632.92} = 0.909851 = \%90.98$$

or:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum e_i^2}{\sum v_i^2}$$

$$R^2 = 1 - \frac{147.204762}{1632.92} = 1 - 0.090148177 = 0.909851822 = \%90.98$$

F-Statistics ،F اختبار إحصائية 4.3

لاختبار معنوية معادلة الانحدار ككل يستخدم اختبار F ويعتمد هو الآخر على نوعين من الفرضيات:

1- فرضية العدم: وتنص على عدم معنوية او جوهرية العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل ، أي ان:

$$H_0: B_1 = 0$$

2- الفرضية البديلة: وتنص على وجود علاقة جوهرية من الناحية الإحصائية بين المتغير التابع والمتغير المستقل ، أي ان:

$$H_1:B_1\neq 0$$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هو:

$$F = \frac{\sum \hat{y}_{i}^{2} / k}{\sum e_{i}^{2} / n - k - 1}$$
 ...(5.3)

أي ان اختبار F هـو عـبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار مقسومة مقسى عدد المتغيرات المستقلة (k) الى الانحرافات غير الموضحة مقسومة على عدد المتغيرات التي تتمثل بعدد المشاهدات (n) مطروحاً منها (k) ناقصاً (1).

وبعد احتساب قيمة (F) تقارن مع قيمة (F) الجدولية المعطاة في الجداول الخاصية بها عند مستوى المعنوية المطلوب (5%، 1%) ودرجة حرية (n-k-1, k) للبسط والمقام لتحديد قبول أو رفض فرضية العدم. فإذا كانت قيمة (F) المحتسبة اكبر من قيمة (F) الجدولية، نرفض فرضية العدم ونقبل الفرضية البديلة أي معنوية العلاقة

المقدرة وبالعكس في حالة كون (F) المحتسبة اقل من قيمتها الجدولية حيث تقبل فرضية العدم أي عدم معنوية العلاقة المقدرة او عدم معنوية معادلة الانحدار. ويمكن احتساب قيمة F بالاعتماد على الصيغ الآتية:

$$F = \frac{\hat{B}_{1} \sum x_{i} y_{i} / k}{\sum e_{i}^{2} / n - k - 1}$$
...(6.3)
$$F = \frac{R^{2} / k}{\sum e_{i}^{2} / n - k - 1}$$

أو

أو

أو

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n - k - 1}$$

$$F = \frac{\sum (\hat{Y}_{i} - \overline{Y})^{2} / k}{\sum (Y_{i} - \hat{Y}_{i})^{2} / n - k - 1}$$

 $F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$

 $F = t_{\hat{B}_1}^2$

العلاقة بين إحصائية F و t:

ويُمكن توضيح العلاقة بين إحصائي F وt في نموذج المتغيرين كالآتي:

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$
...(7.3)

$$F = \frac{\hat{B}_{1}^{2} \sum x_{i}^{2}}{\sum e_{i}^{2} / n - 2}$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2 \sum x_i^2}{\sigma^2}$$

$$F = \frac{\hat{B}_1^2}{\sigma^2 / \sum x_i^2}$$

$$:: \sigma^2 / \sum x_i^2 = var(\hat{B}_1) = S_{\hat{B}_1}^2$$

$$\therefore F = \frac{\hat{B}_1^2}{S_{\hat{B}_1}^2} = \left(\frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}}\right)^2 = t_{\hat{B}_1}^2 \qquad ...(8.3)$$

ولاختبار جوهرية العلاقة بين المتغير التابع، Y، والمتغير المستقل، X، نعود إلى مثالنا (1.2)، وبالاعتماد على الصيغ الرياضية الخاصة بـ F نحصل على:

$$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

$$F = \frac{1485.715238/1}{147.204762/8 - 1 - 1} = \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.55708597$$

وبما ان قيمة (F) المحتسبة والبالغة (60.55) اكبر من قيمة (F) الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.99)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل أي معنوية او جوهرية العلاقة المقدرة.

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum_{i} x_i y_i / k}{\sum_{i} e_i^2 / n - k - 1}$$

$$= \frac{(1.486904762)(999.2) / 1}{24.534127} = \frac{1485.715238}{24.534127} = 60.5570$$

or:

$$F = \frac{R^2/k}{1 - R^2/n - k - 1}$$

$$= \frac{0.909851822/1}{1 - 0.909851822/8 - 1 - 1} = \frac{0.909851822}{0.015024696} = 60.5570$$
or:

$$F = \frac{\hat{B}_{1}^{2} \sum x_{i}^{2} / k}{\sum e_{i}^{2} / n - k - 1}$$

$$=\frac{(1.486904762)^2 (672)/1}{24.534127} = \frac{(2.210885771)(672)}{24.534127}$$

$$=\frac{1485.715238}{24.534127}=60.5570$$

or:

$$F = t_{\hat{B}_1}^2$$
$$= (7.781843354)^2 = 60.5570$$

5.3 معامل الارتباط البسيط، Simple Correlation Coefficient ، معامل الارتباط البسيط،

يقصد بالارتباط وجود علاقة بين ظاهرتين أو اكثر، ويسمى المقياس الذي تُقاس به درجة الارتباط بمعامل الارتباط والذي يرمز له بالرمز (r). حيث ان تحليل الارتباط يعامل أي متغيرين بشكل متماثل، Symmetrically، ولا يوجد تمييز بين المتغير الستابع والمتغيرين بشكل متماثل، المستقلة. تأسيساً على ذلك يفترض تحليل الارتباط ان كلا المتغيرين عشوائي، Random، أو تصادفي، Stochastic، وهذا يتطلب احتمائية التوزيع الطبيعي. ويمكن حسابه على النحو الآتى:

$$\mathbf{r} = \left[\sqrt{\frac{\sum \mathbf{x}_{i}^{2}}{\sum \mathbf{y}_{i}^{2}}} \right] \hat{\mathbf{B}}_{1} \qquad \dots (9.3)$$

9

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}}$$

أه

$$r=\mp\sqrt{|R|^2}$$

 $\hat{\mathbb{B}}_1$: تعتمد على إشارة : $\hat{\mathbb{B}}_1$

أو

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{n S_X S_Y}$$

حيث ان:

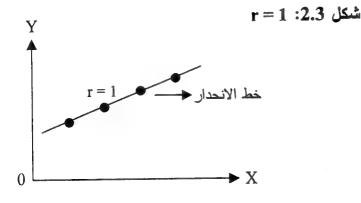
$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$
 , $S_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}}$,

ونتر اوح قيمة r بين 1+ ، 1- اي ان:

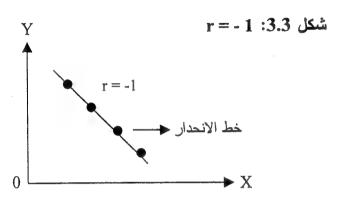
$$-1 \le r \le +1$$

وقد يكون الارتباط بين ظاهرتين أو اكثر موجباً أو سالباً والإشارة تدل على وجود علاقة طردية أو عكسية و لا تدل على قوة العلاقة التي تحدد من خلال الأرقام. ويمكن التمييز بين الخصائص الآتية:

X عندما تكون x=1 ، معنى ذلك وجود علاقة خطية تامة وموجبة بين المتغيرين Y ، Y ، اي ان الزيادة في قيمة المتغير X يترتب عليه زيادة في قيمة المتغير التابع Y .



 $Y \cdot X$ معنى ذلك وجود علاقة خطية تامة وسالبة بين المتغيرين $Y \cdot X$ أي ان الــزيادة فــي قيمة المتغير المستقل X يترتب عليه انخفاض في قيمة المتغير التابع Y.



ج- عندما 0 = r، معنى ذلك ليست هناك علاقة بين المتغيرين X، Y، في هذه الحالة ان تقدير المعامل B بطريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، يكون مساوياً للصفر. ويشير ذلك ان متوسط التغيرات في المتغير المستقل ليس لها تأثير على المتغير التابع. في مثل هذه الظروف فان معامل الارتباط يكون مساوياً للصفر، ذلك لأن الانحدار يوضح عدم وجود تباين أو انحراف في المتغير التابع، بمعنى آخر:

$$\sum (\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i}} - \overline{\mathbf{Y}})^2 = 0$$

حيث أن متوسط قيمة Y دائماً تكون مساوية للقيمة المحسوبة، Calculated value، من معادلة الانحدار:

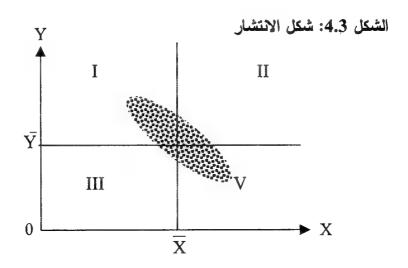
$$\Sigma (Y_i - \hat{Y})^2 = \Sigma (Y_i - \overline{Y})^2$$
 . $\hat{Y}_i = \overline{Y}$: خيث ان

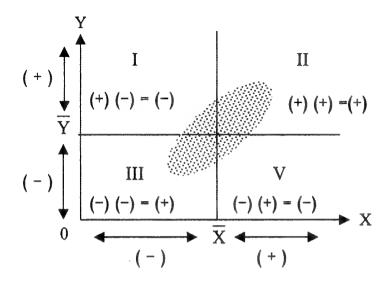
وبالتالي فان معادلة معامل التحديد البسيط r^2 يجب ان تساوي صغر، اي ان:

$$r^{2} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (Y_{i} - \hat{Y}_{i})^{2}}{\sum_{i=1}^{n} (Y_{i} - \overline{Y})^{2}}$$

يعني ذلك ان معامل الارتباط البسيط r ، يجب ان يساوي صفراً أيضاً.

ويمكن توضيع الارتباط بين متغيرين X، Y من خلال الشكل الانتشاري التالي الذي يعطي مؤشراً على قوة او ضعف الارتباط بين المتغير التابع Y، والمتغير المستقل X، وكما يأتي:





يبين الشكل أعلاه، انه عندما يكون انتشار المشاهدات قريبة جداً من خط الانحدار يدل على قوة العلاقة بين المتغيرين X، Y، أما عندما تكون المشاهدات متباعدة عن خط الانحدار يدل ذلك على ضعف العلاقة أو الارتباط بين المتغيرين. ولذلك فان الشكل الانتشاري لا يعطي إلا فقط صورة مبسطة وأولية عن طبيعة العلاقة، فضلاً عن ذلك يمكن ملاحظة ما يأتي:

- في المربعين الثاني والثالث، تكون قيمة معامل الارتباط، r، موجبة وذلك لان معظم المشاهدات تتجمع في هذين المربعين، اي ان (X_iY_i) لها الإشارة نفسها.
- في المربعين الأول والرابع، تكون قيمة معامل الارتباط، \mathbf{r} ، سالبة وذلك لان معظم المشاهدات تتجمع في هذين المربعين أي ان \mathbf{X}_i لها إشارة معاكسة لانحرافات \mathbf{Y}_i .
- تقــترب قــيمة معــامل الارتــباط من الصفر، عندما يكون مجموع الانحرافات للمتغيريــن X، Y عــن وســطها الحسابي تقترب من الصفر، أي عندما تنتشر

المشاهدات على جميع أرباع الشكل، ويعني ذلك عدم وجود علاقة خطية بين المتغيرين.

- تكون قيمة معامل الارتباط (r) موجبة، عندما يكون مجموع انحرافات المتغيرين عن وسطها الحسابي موجب.
- تكون قيمة معامل الارتباط، r، سالبة عندما يكون مجموع انحرافات المتغيرين عن وسطها الحسابي سالباً.

باختصار، يمكن توضيح العلاقات أعلاه في الصيغة الآتية:

أ- عندما:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum x_i y_i > 0$$

معنى ذلك ان معامل الارتباط يكون موجباً.

ب- عندما:

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}) = \sum x_i y_i < 0$$

معنى ذلك ان معامل الارتباط يكون سالباً.

ويظهر من ذلك ان مجموع حاصل ضرب الانحرافات $(X_i y_i)$ يتأثر بعدد المشاهدات، أي انه كلما زاد عدد المشاهدات، كلما كان الارتباط بين Y، Y موجباً وقوياً. ومعنى ذلك انه في حالة زيادة عدد المشاهدات للعينة يصبح معامل الارتباط أقوى، ولكنه يختلف عن مقياس آخر للظاهرة نفسها.

وبذلك فان مجموع حاصل ضرب الانحرافات $(\Sigma x_i y_i)$ لا يعتبر مقياساً ملائماً لتبيان قوة العلاقة بين المتغيرين، وذلك لان المقياس يتأثر بوحدة القياس كالأميار والليزات والدينار وغيرها. وبذلك لا تصلح للمقارنة في حالة اختلاف

وحدات القياس. ولكي نحصل على مقياس يبين قوة العلاقة، ويكون صالحاً لأجراء المقارنة نحتاج إلى معاملات لا تتأثر قيمتها بوحدات القياس المستخدمة. وهذا العامل يمكن الحصول عليه بقسمة مجموع الانحرافات $(\Sigma x_i y_i)$ على عدد المشاهدات ($\Sigma x_i y_i$)، أي ان:

$$Cov(X,Y) = \frac{\sum x_i y_i}{n}$$

 y_i ويسمى هذا بالتباين المشترك، Covariance، ولكن الناتج ما يزال يتأثر بالعامل y_i وهو وحدات القياس للمتغيرين، ولهذا يمكن تصحيح هذا التأثير بقسمة التباين المشترك على الانحراف المعياري لكل من Y_i Y_i Y_i Y_i على التوالي. ويمكن اعتماد هذا المقياس للوصول إلى تحديد قيمة معامل الارتباط البسيط.

$$r = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}} \cdot \hat{B}_1$$
$$= \sqrt{\frac{672}{1632.92}} \cdot (1.486904762)$$

= (0.641508156) (1.486904762) = 0.953861532

إذن العلاقة بين المتغيرين X و Y طر ديه.

or

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{\sqrt{(\sum x_i^2)(\sum y_i^2)}}$$

$$= \frac{999.2}{\sqrt{(672)(1632.92)}} = \frac{999.2}{(25.92296279)(40.40940485)}$$

$$= \frac{999.2}{1047.5314978} = 0.9538$$

$$r = T_1 \sqrt{R^2} = \sqrt{0.909851822} = 0.9538$$

or

$$r = \mp \sqrt{R^2} = \sqrt{0.909851822} = 0.9538$$

or

$$r = \frac{\sum x_i y_i}{nS_X S_Y}$$

$$S_X = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{672}{8}} = 9.16515139$$

$$S_Y = \sqrt{\frac{\sum y_i^2}{n}} = \sqrt{\frac{1632.92}{8}} = 14.2868821$$

$$r = \frac{999.2}{(8)(9.16515139)(14.2868821)} = \frac{999.2}{1047.531498} = 0.9538$$

6.3 حدود الثقة لمعاملات الانحدار:

نعني بحدود أو فترات الثقة لمعاملات الانحدار، تقدير مدى الثقة التي تقع ضمنها القيمة الحقيقية للمعلمة أي معلمة المجتمع. ويراد بحدي الثقة الحد الأدنى للمور (L) والحد الأعلى Lower Limit الذي يرمز له بالرمز (L) والحد الأعلى Upper Limit الذي يرمز لله بالرمز (U). ويعني ذلك تحديد مدى تتراوح فيه قيمة B بين هذه الحدين. بمعنى أخر يمكن القول إلى أي مدى ممكن تحريك توزيع t إلى اليسار أو اليمين قبل ان تصل إلى القيمة الحرجة، Critical Value. والصيغة الرياضية لتقدير حدود الثقة هي:

(الانحراف المعياري للمعلمة المقدرة) $\mp (t\alpha/2)$ المعلمة المقدرة = معلمة المجتمع

مـــثال 5.3: ولتوضيح كيفية احتساب حدود الثقة نعود إلى بيانات المثال (1.2)، حيث ان (t) الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) تساوي (2.45)، لذا فان معامل الثقة هو 95%.

فبالنسبة إلى 1، فان:

$$B_1 = \hat{B}_1 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_1)$$

 $B_1 = 1.486904762 \mp (2.45)(0.191073592)$

 $B_1 = 1.486904762 \mp 0.4681303$

1.018774462 < B₁ < 1.955035062

هـذا يعنــي ان هناك احتمال 95% ان تكون قيمة \hat{B}_1 مساوية لــ B_1 الحقيقية بين الحدين الأعلى 1.955 و الأدنى 1.018 و ان هناك احتمال 5% ان لا تكون كذلك.

أما بالنسبة لـ B₀ فإن:

$$B_0 = \hat{B}_0 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_0)$$

 $B_0 = 24.48571429 \mp (2.45)(3.859497372)$

 $B_0 = 24.48571429 \mp 9.455768561$

 $15.02994573 < B_0 < 33.94148285$

هــذا يعنــي ان هناك احتمال 95% ان تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع B_0 بين الأعلى 33.941 والأدنى 15.029 وان هناك احتمال 5% ان تقع خارج هذين الحدين.

وقد جرى استخدام مستوى الثقة 95% في الدراسات الاقتصادية ويعني ذلك ان 95% من الحالات تقع ضمن فترة الثقة، وان 5% من الحالات تقع خارج هذه الفترة. بمعنى آخر إذا كانت $B_0=0.05$ فأن احتمال B_1 ان توجد بين الحدين 95%.

جدول تحليل التباين:

يهدف جدول تحليل التباين، ANOVA Table، إلى توضيح تأثير المتغير المستقل في المتغير التابع. وتزداد أهمية هذا الجدول عند دراسة الانحدار المتعدد حيث يستفاد منه في معرفة تأثير كل متغير من المتغيرات المستقلة في المتغير التابع وبالتالي اعتماد المتغيرات المؤثرة في النموذج.

ويمكن بناء جدول تحليل النباين في ضوء المعلومات التفصيلية أدناه:

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحربة	متوسط مربعات الخطأ	F
الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار أي بواسطة المتغير المستقل X _i	$\sum \hat{\mathbf{y}}_i^2 = \hat{\mathbf{B}}_1 \sum \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i$	k	$\sum \hat{y}_i^2/k$	$F = \frac{\sum \hat{y}_i^2 / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$
الانحرافات غير الموضحة	$\sum e_i^2$	n-k-1	$\sum e_i^2 / n - k - 1$	
الانحرافات الكلية	$\sum y_i^2$	n – 1		

ويمكن بناء جدول تحليل التباين لمثالنا بعد ان تم تطبيق جميع الاختبارات عليه كالآتي:

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحربة	متوسط مربعات الخطأ	F
الاحرافات الموضحة من قبل X _i	1485.715238	1	1485.715238/1	$F = \frac{1485.715238/1}{147.204762/6}$ $= 60.55708597$
الانحرافات غير الموضحة	147.204762	8-1-1=6	147.204762/6	
الاتحرافات الكلية	1632.92	7		

7.3 التنبين، Forecasting:

أحـــد الأهداف الرئيسة لتطبيق بحث الاقتصاد القياسي هو استخدام النموذج المقـدر للتنــبؤ بقــيمة المتغيرات التابعة استناداً إلى قيم المتغيرات المستقلة من أجل الـتعرف علــى مسار الظاهرة موضوع البحث في المستقبل، حيث يعرف التنبؤ بأنه تحلــيل بــيانات الماضـــي وتطبيق نتائجها على المستقبل من خلال استخدام نموذج رياضي مناسب، أي ان (\hat{Y}) يمكن ان تستخدم في التنبؤ بقيمة (Y) الجديدة ولتكن رياضي حالة الاعتماد على قيمة (X) الجديدة ولتكن (X_{t+1}) .

وللتنبؤ أخطاء وقد ينشأ بسبب:

$$Y_{t+1} - E(Y_{t+1})$$
 - خطأ التقدير

$$E(Y_{t+1}) - YP_{t+1}$$
 خطأ المعاينة -

وعليه فان الخطأ الحاصل في التنبؤ عن قيمة المفردة الواحدة هو مجموع نوعين من الانحراف أي:

$$Y_{t+1} - YP_{t+1} = [Y_{t+1} - E(Y_{t+1})] + [E(Y_{t+1}) - YP_{t+1}]$$

و لأغراض التنبؤ نفترض أن القيمة المراد التنبؤ بها، تقع خارج قيم (X_i) المشمولة بالعينة أي ان المحاولة الجديدة تكون مستقلة عن القيم التي استخدمت في تحليل الانحدار، حيث ان معادلة الخط المستقيم الحقيقية هي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$
 ...(10.3)

المعادلة التقديرية لها:

$$\hat{Y}_{i} = \hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}X_{i} \qquad \dots (11.3)$$

المعادلة الحقيقية في الفترة 1+1 هي:

$$Y_{t+1} = B_0 + B_1 X_{t+1} + U_{t+1}$$
 ...(12.3)

فالمعادلة التنبؤية في الفترة 1+1 تكون:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1}$$
 ...(13.3)

عليه فأن خطأ التنبؤ يكون:

$$Y_{t+1} - YP_{t+1} = B_0 + B_1X_{t+1} + U_{t+1} - \hat{B}_0 - \hat{B}_1X_{t+1}$$
 ...(14.3)

ان مقدرات (OLS) هي أفضل مقدرات خطية غير متحيزة وان خطأ التنبؤ يعتمد على عنصر الخطأ العشوائي، أي (U_{t+1}) . ونفترض ان قيمة الخطأ العشوائي على عنصر الخطأ العشوائي، أي $U_1, U_2, ..., U_n$ مستقلة عن القيم $U_1, U_2, ..., U_n$ وأنها تتوزع توزيعاً طبيعياً، كذلك فان خطأ التنبؤ يتوزع توزيعاً طبيعياً بوسط حسابي يساوي صفر وتباين ثابت. ويمكن إثبات ذلك كالآتى:

أولاً: الوسط الحسابي المساوي للصفر:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = E(B_0 + B_1X_{t+1} + U_{t+1}) - E(\hat{B}_0 + \hat{B}_1X_{t+1})$$

= $B_0 + B_1X_{t+1} + E(U_{t+1}) - E(\hat{B}_0) - E(\hat{B}_1)X_{t+1}$

$$E(\hat{B}_0) = B_0 \quad , E(\hat{B}_1) = \hat{B}_1$$

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = B_0 + B_1X_{t+1} + E(U_{t+1}) - B_0 - B_1X_{t+1}$$

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = E(U_{t+1})$$

ولما كانت:

$$E(U_{t+1}) = 0$$

فإن:

$$E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = 0$$

ثانياً: تبايس خطاً التنبوز:

$$\sigma^2 P = E[(Y_{t+1} - YP_{t+1}) - E(Y_{t+1} - YP_{t+1})]^2$$

وبما ان خطأ التنبؤ وسطه الحسابي يساوي صفر، أي ان:

$$\begin{split} & E(Y_{t+1} - YP_{t+1}) = 0 \\ & \therefore \sigma^2 P = E \big[(Y_{t+1} - YP_{t+1}) \big]^2 \end{split}$$

$$\sigma^{2} P = E[(B_{0} + B_{1}X_{t+1} + U_{t+1} - \hat{B}_{0} - \hat{B}_{1}X_{t+1})]^{2}$$

$$\sigma^{2}P = E\left[U_{t+1} + \left\{ (B_{0} - \hat{B}_{0}) + X_{t+1}(B_{1} - \hat{B}_{1}) \right\} \right]^{2}$$

$$\sigma^{2}P = EU_{t+1}^{2} + 2\left\{ (B_{0} - \hat{B}_{0}) + X_{t+1}(B_{1} - \hat{B}_{1}) \right\} EU_{t+1} + E\left\{ (B_{0} - \hat{B}_{0}) + X_{t+1}(B_{1} - \hat{B}_{1}) \right\}^{2}$$

ولما كانت:

$$EU_{t+1}=0$$

إذن الحد الثاني بكامله يساوي الصفر:

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} + E(B_{0} - \hat{B}_{0})^{2} + 2X_{t+1}E(B_{0} - \hat{B}_{0})(B_{1} - \hat{B}_{1}) + X_{t+1}^{2}E(B_{1} - \hat{B}_{1})^{2}$$

$$\sigma^2 P = \sigma^2 + var(\hat{B}_0) + X_{t+1}^2 var(\hat{B}_1) + 2X_{t+1} cov(B_0 B_1)$$

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} + \sigma^{2} \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \right] + X_{t+1}^{2} \left[\frac{\sigma^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \right] - 2X_{t+1} \overline{X} \left[\frac{\sigma^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \right]$$

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} + \left[\frac{\sigma^{2}}{n} + \frac{\sigma^{2}\overline{X}^{2}}{\sum x_{i}^{2}}\right] + X_{t+1}^{2} \left[\frac{\sigma^{2}}{\sum x_{i}^{2}}\right] - 2X_{t+1}\overline{X} \left[\frac{\sigma^{2}}{\sum x_{i}^{2}}\right]$$

 $\sum x_i^2$ وبضرب الجزء الأول من الحد الثاني وتقسيمه على

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} + \frac{\sigma^{2} \sum x_{i}^{2}}{n \sum x_{i}^{2}} + \frac{\sigma^{2} \overline{X}^{2}}{\sum x_{i}^{2}} + X_{t+1}^{2} \frac{\sigma^{2}}{\sum x_{i}^{2}} - 2X_{t+1} \overline{X} \frac{\sigma^{2}}{\sum x_{i}^{2}}$$

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} + \frac{\sigma^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \left[\frac{\sum x_{i}^{2}}{n} + \overline{X}^{2} + X_{t+1}^{2} - 2X_{t+1} \overline{X} \right]$$

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} + \frac{\sigma^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \left| \frac{\sum x_{i}^{2}}{n} + (X_{t+1} - \overline{X})^{2} \right|$$

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} + \left[\frac{\sigma^{2} \sum x_{i}^{2}}{n \sum x_{i}^{2}} + \frac{\sigma^{2} (X_{t+1} - \overline{X})^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \right]$$

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} + \left[\frac{\sigma^{2}}{n} + \frac{\sigma^{2}(X_{t+1} - \overline{X})^{2}}{\sum x_{i}^{2}}\right]$$

$$\sigma^{2}P = \sigma^{2} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \overline{X})^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \right]$$

 $\sigma^{2}P = \sigma^{2} + \sigma^{2} \left| \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \overline{X})^{2}}{\sum X_{i}^{2}} \right|$

وإذا رمزنا لتباين خطأ التنبؤ بالرمز S^2P فان معادلة تقدير تباين خطأ التنبؤ تكون:

$$S^{2}P = \sigma^{2} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \overline{X})^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \right]$$

و عليه فإن:

$$(Y_{t+1} - YP_{t+1}) \sim N(0, S^2P)$$

بعبارة أخرى ان:

خطأ التنبؤ $(Y_{t+1} - YP_{t+1})$ يتوزع، \sim ، توزيعاً طبيعياً، N، بوسط حسابي مساوي للصفر وتباين ثابت مقداره S^2P .

أما اختبار (t) فيتم بموجب:

$$\sigma^2 U = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

$$S^{2}YP_{t+1} = \sigma^{2}u \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \overline{X})^{2}}{\sum x_{i}^{2}}\right]$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^{2}YP_{t+1}}$$

$$t = \frac{YP_{t+1}}{SYP_{t+1}}$$

أما حدود الثقة فهي:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

ويتم إيجاد YP_{t+1} من خلال:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1}$$

مثال 6.3: ولتوضيح التنبؤ في ضوء الصيغ أعلاه نرجع إلى البيانات الاحصائية الخاصة بمثالنا (1.2) ومنها:

$$\hat{Y}_i = 24.48571429 + 1.486904762 X_i$$

وللتنبؤ بقيمة $\mathbf{X}_{t+1} = 36$ عندما \mathbf{YP}_{t+1} فإن:

$$YP_{t+1} = 24.48571429 + 1.486904762(36)$$

=78.01428572

الف دينار معدل الأجر السنوي لموظف له من الخدمة 36 سنة.

ولتقدير حدود ثقة 95% للمعلمة $\, {
m Y}_{{
m t}+1} \,$ فإن:

$$Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

وللحصول على SYP₁₊₁ فإن:

$$\sigma^2 U = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{147.204762}{8-2} = 24.534127$$

$$n-2 8-2$$

$$S^{2}YP_{t+1} = \sigma^{2} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(X_{t+1} - \overline{X})^{2}}{\sum x_{i}^{2}} \right]$$

$$= 24.534127 \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{(36 - 18)^2}{672} \right]$$

$$= 24.54127 \left[1 + 0.125 + \frac{324}{672} \right]$$
$$= 24.534127 \left[1 + 0.125 + 0.482142857 \right]$$

$$SYP_{t+1} = \sqrt{S^2YP_{t+1}} = \sqrt{39.42984696} = 6.279318989$$

$$\therefore Y_{t+1} = YP_{t+1} \mp (t\alpha/2)(SYP_{t+1})$$

 $Y_{t+1} = 78.01428572 \pm 15.38433152$

$$Y_{t+1} = 78.01428572 \mp (2.45)(6.279318989)$$

$$62.6299542 < Y_{t+1} < 93.39861724$$

مثال شامل: في ضوء المجاميع الآتية التي تمثل العلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة ما (Y_i) وسعرها (X_i) مع بقاء العوامل الأخرى ثابتة:

$$n = 8$$
, $\sum Y_i = 32$, $\sum X_i = 24$, $\sum X_i Y_i = 86$
 $\sum X_i^2 = 96$, $\sum Y_i^2 = 140$

المطلوب:

المصنفو فات.

- 1- احتساب معلمات العلاقة بطريقة المعادلات الطبيعية ، المحددات، الانحرافات،
- -2 اختبار معنوية المعالم المقدرة عند مستوى معنوية -2 إذا علمت ان -2
 - عند مستوى المعنوية المذكور ودرجة حرية (6) هي 2.31.

4- وضح مقدار ما يفسره المتغير المستقل من التغير في المتغير التابع.

- $.B_1 \cdot B_0$ كون حدود ثقة 95% لكل من $.B_1 \cdot B_0$
- Y_i و X_i و الرتباط X_i و Y_i 6- أختبر معنوية المعادلة المقدرة إذا علمت ان قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية
- 5% ودرجة حرية (1، 6) للبسط والمقام تساوى 5.99.
 - 7- حلل تباين المعالم باستخدام جدول ANOVA.
 - $X_{t+1} = 10$ عند Y_{t+1} عند $Y_{t+1} = 10$ عند $Y_{t+1} = 10$ عند $Y_{t+1} = 10$ عند $Y_{t+1} = 10$

الحل:

1- احتساب معلمات العلاقة:

* بطريقة المعادلات الطبيعية:

$$\sum Y_i = n\hat{B}_0 + \hat{B}_1 \sum X_i$$
 ...(15.3)

$$\sum X_{i} Y_{i} = \hat{B}_{0} \sum X_{i} + \hat{B}_{1} \sum X_{i}^{2} \qquad \dots (16.3)$$

$$32 = 8\hat{B}_{0} + 24\hat{B}_{1} \qquad \dots (17.3)$$

$$86 = 24\hat{B}_{0} + 96\hat{B}_{1} \qquad \dots (18.3)$$

وبضرب المعادلة (17.3) في (3) نحصل على:

$$96 = 24\hat{B}_0 + 72\hat{B}_1$$

$$86 = 24\hat{B}_0 + 96\hat{B}_1$$

$$10 = -24\hat{B}_1$$
 : بالطرح نحصل

$$\hat{B}_1 = \frac{10}{-24} = -0.416$$
 $\hat{B}_1 = \frac{10}{-24} = -0.416$ وللحصول على قسيمة \hat{B}_0 يتم تعويض قيمة \hat{B}_1 في أحد المعادلتين الأساسيتين ولتكن معادلة (3).

 $32 = 8\hat{B}_0 + 24\hat{B}_1$ $32 = 8\hat{B}_0 + 24(-0.416)$

$$32 = 8\hat{B}_0 - 9.984$$

$$32 + 9.984 = 8\hat{B}_0$$

 $41.984 = 8\hat{B}_0$

$$\hat{B}_0 = \frac{41.984}{8} = 5.248$$

$$\therefore \hat{\mathbf{Y}}_{i} = \hat{\mathbf{B}}_{0} + \hat{\mathbf{B}}_{1} \mathbf{X}_{i}$$

$$\hat{Y}_i = 5.248 - 0.416X_i$$

تشير المعادلة التقديرية إلى وجود علاقة عكسية بين المتغير المستقل X_i الذي يمثل السعر والمتغير التابع Y_i الذي يمثل الكمية المطلوبة فكل زيادة في السعر X_i بمقدار وحدة واحدة سوف تؤدي إلى انخفاض الكمية المطلوبة بمقدار 0.416 وحدة.

* طريقة المحددات:

$$\begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_0 \\ \hat{B}_1 \end{bmatrix}$$

$$|D| = \begin{bmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{bmatrix} = (8)(96) - (24)(24) = 768 - 576 = 192$$

$$|N_0| = \begin{bmatrix} 32 & 24 \\ 86 & 96 \end{bmatrix} = (32)(96) - (24)(86) = 3072 - 2064 = 1008$$

$$|N_1| = \begin{bmatrix} 8 & 32 \\ 24 & 86 \end{bmatrix} = (8)(86) - (32)(24) = 688 - 768 = -80$$

$$\hat{B}_0 = \frac{|N_0|}{|D|} = \frac{1008}{192} = 5.2$$

$$\hat{B}_1 = \frac{|N_1|}{|D|} = \frac{-80}{192} = -0.416$$

$$\hat{Y}_i = 5.2 - 0.416X_i$$

* طربقة الانحرافات:

من بيانات السؤال يمكن استخراج الانحرافات وكما يأتي:

$$\sum x_i y_i = \sum X_i Y_i - \frac{(\sum X_i)(\sum Y_i)}{n}$$

$$= 86 - \frac{(96)(32)}{8} = 86 - 96 = -10$$

$$\sum x_i^2 = \sum X_i^2 - \frac{(\sum X_i)^2}{n}$$

$$=96 - \frac{(24)^2}{8} = 96 - 72 = 24$$

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$

$$=140-\frac{(32)^2}{8}=140-128=12$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{-10}{24} = -0.416$$

$$\hat{B}_{0} = \overline{Y} - \hat{B}_{1} \overline{X}$$

$$\hat{B}_{0} = 4 - (-0.416)(3)$$

$$\hat{B}_{0} = 4 + 1.248$$

$$\hat{B}_{0} = 5.2$$

$$\therefore \hat{Y}_{i} = 5.2 - 0.416 X_{i}$$

* طريقة المصفوفات:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$|X'X| = \begin{vmatrix} n & \sum X_i \\ \sum X_i & \sum X_i^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 24 \\ 24 & 96 \end{vmatrix} = 768 - 576 = 192$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{|X'X|} \operatorname{adj} X'X$$

$$\operatorname{adj} X'X = \begin{bmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 8 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{192} \begin{bmatrix} 96 & -24 \\ -24 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.125 \\ -0.125 & 0.041666666 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} \sum Y_i \\ \sum X_i Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.125 \\ -0.125 & 0.041666666 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 32 \\ 86 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 16 + (-10.75) \\ -4 + 3.583333276 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 5.2 \\ -0.416 \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_{i} = 5.2 - 0.416 X_{i}$$

2- اختبار معنوية المعالم المقدرة:

$$\sum y_i^2 = \sum \hat{y}_i^2 + \sum e_i^2$$

$$\sum \hat{y}_i^2 = \hat{B}_1 \sum x_i y_i = (-0.416)(-10) = 4.16$$

$$\sum e_i^2 = \sum y_i^2 - \sum \hat{y}_i^2$$

$$\sum e_i^2 = 12 - 4.16 = 7.84$$

$$S_{e_i}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2} = \frac{7.84}{8-2} = 1.306666667$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = \frac{S_{e_i}^2}{\sum x_i^2} = \frac{1.306666667}{24} = 0.054444444$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.054444444}\,4 = 0.233333333$$

$$t\hat{B}_1 = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}^2} = \frac{-0.416}{0.2333333333} = -1.782857145$$

وبما ان قيمة (t) المحتسبة والبالغة (1.782) اقل من قيمة (t) الجدولية عند مستوى معنوية (%) ودرجة حرية (%)، والبالغة (%) عليه تقبل فرضية العدم، أي عدم معنوية المعلمة المقدرة (%).

 $\hat{\mathrm{B}}_0$ ب- بالنسبة لــ $\hat{\mathrm{B}}_0$:

$$S_{e_i}^2 = 1.306666667$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = S_{e_i}^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = 1.306666667 \left[\frac{1}{8} + \frac{(3)^2}{24} \right]$$

$$= 1.3066666667 [0.125 + 0.375]$$

$$= 1.3066666667 (0.5)$$

$$= 0.6533333333$$

$$t\hat{B}_0 = \frac{\hat{B}_0}{S\hat{p}_0} = \frac{5.2}{0.808290377} = 6.4333317$$

 $S_{\hat{B}_0} = \sqrt{S_{\hat{B}_0}^2} = \sqrt{0.6533333333} = 0.808290377$

وبما ان قيمة (t) المحتسبة والبالغة (6.433) اكبر من مثيلتها الجدولية عند مستوى (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.31)، عليه نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل اي معنوية المعلمة المقدرة (\hat{B}_0) .

$$B_0 = 5.2 \mp (2.31)(0.808290377)$$

$$B_0 = 5.2 \mp 1.867150771$$

 $B_0 = \hat{B}_0 \mp (t\alpha/2)(S\hat{B}_0)$

$$3.332849229 < B_0 < 7.067150771$$

هناك احتمال 95% ان تقع القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع B_0 بين الحدين الأعلى 7.067 و الأدنى 3.332، وهناك احتمال 5% ان تقع خارج هذين الحدين.

ب- بالنسبة إلى B₁:

$$B_1 = \hat{B}_1 \mp (t \alpha/2)(S\hat{B}_1)$$

$$B_1 = -0.416 \mp (2.31)(0.2333333333)$$

$$B_1 = -0.416 \mp 0.538999999$$

$$-0.95999999 < B_1 < 0.1229999999$$

هناك احتمال 95% ان تكون قيمة $\hat{\mathbf{B}}_1$ مساوية إلى \mathbf{B}_1 بين الحدين الأعلى 0.123 والأدنى 0.96-، وهناك احتمال 5% ان لا تكون كذلك.

 $: \mathbb{R}^2$ معامل التحديد -4

$$R^2 = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i}{\sum y_i^2}$$

$$R^2 = \frac{(-0.416)(-10)}{12} = \frac{4.16}{12} = 0.346666666 = \%34.666$$

هـذا يعنسي ان المتغير المستقل X_i والذي يمثل السعر يفسر حوالي 34.666% من التغير الحاصل في المتغير التابع Y_i والذي يمثل الكمية المطلوبة من السلعة وان النسبة الباقية والبالغة 65.334% تمثل تأثير متغيرات أخرى لم تدخل في المعادلة كالدخل، أسعار السلع البديلة ...الخ.

Y_i و X_i عامل الارتباط بين

$$r = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\sum y_i^2}}.\hat{B}_1$$

$$r = \sqrt{\frac{24}{12}} \left(-0.416 \right)$$

$$r = \sqrt{2} \cdot (-0.416)$$

$$r = 1.414213562(-0.416)$$

$$r = -0.588312841$$

 \mathbf{Y}_{i} ، \mathbf{X}_{i} المتغيرين \mathbf{Y}_{i} ، \mathbf{Y}_{i} ،

6- اختبار F:

$$F = \frac{\hat{B}_1 \sum x_i y_i / k}{\sum e_i^2 / n - k - 1}$$

$$F = \frac{(-0.416)(-10)/1}{7.84/8 - 1 - 1} = \frac{4.16}{1.306666667} = 3.183673469$$

وبما ان قيمة F المحتسبة والبالغة (3.183) اقل من قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% ودرجة حرية (1،6) للبسط والمقام والبالغة (5.99)، عليه نقبل فرضية العنم والتي تنص على عدم معنوية العلاقة المقدرة.

7- جدول تحليل التباين:

مصدر التباين	مجموع مربعات الانحرافات	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	F	
$\sum \hat{y}_i^2$	4.16	1	4.16	F = 3.183	
$\sum e_i^2$	7.84	6	1.306666667		
$\sum y_i^2$	12	7			

- التنبية:

$$YP_{t+1} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{t+1}$$

$$YP_{t+1} = 5.2 + (-0.416)(10)$$

$$YP_{t+1} = 5.2 - 4.16$$

$$YP_{t+1} = 1.04$$

ولتقدير فترة الثقة نحتاج حساب SYP_{t+1}:

$$\begin{split} \mathbf{S}^2\mathbf{Y}\mathbf{P}_{t+1} &= \sigma^2 \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{(\mathbf{X}_{t+1} - \overline{\mathbf{X}})^2}{\sum \mathbf{x}_i^2} \right] \\ &= 1.306666667 \left[1 + \frac{1}{8} + \frac{(10 - 3)^2}{24} \right] \\ &= 1.3066666667 \left[1 + 0.125 + 2.041666667 \right] \\ &= 1.3066666667 (3.16666667) \\ &= 4.137777779 \end{split}$$

$$\mathbf{S}\mathbf{Y}\mathbf{P}_{t+1} &= \sqrt{\mathbf{S}^2\mathbf{Y}\mathbf{P}_{t+1}} = \sqrt{4.137777779} = 2.034152841$$

$$: \mathbf{Y}_{t+1} = \mathbf{Y}\mathbf{P}_{t+1} \mp (t\alpha/2)(\mathbf{S}\mathbf{Y}\mathbf{P}_{t+1})$$

 $Y_{t+1} = 1.04 \mp (2.31)(2.034152841)$

 $-3.658893063 < Y_{t+1} < 5.738893063$

 $Y_{t+1} = 1.04 \mp 4.698893063$

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.3: ماذا تعنى معلمات المعادلة الآتية:

$$C_t = 20.12 + 0.31Y_t$$

حيث أن:

.C_t تمثل الأنفاق الخاص.

 Y_t : تمثل الدخل المتاح.

$$\overline{C} = 400$$
 , $\overline{Y} = 800$

السؤال 2.3: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الآتية:

$$\hat{C}_i = 15 + 0.81Y_i$$
(3.1) (18.7) $n = 19$

حيث أن الأرقام بين القوسين تشير الى قيمة (t) العملية (المحتسبة).

أ- أحسب الانحراف المعياري للمعلمات المقدرة.

$$(Y_i)$$
 ب صبع حدود ثقة ولمستوى دلالة (95%) لمعامل المتغير المستقل $t (n-2, \alpha/2) = 2.11$ مستخدماً

السؤال 3.3: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 21.5 + 0.84X_t$$

S.E (9.4) (0.024) $n = 12$ $R^2 = 0.992$

حيث أن الأرقام بين القوسين تشير الى الانحراف المعياري.

t (10, 0.05) = 2.23 أ- اختبر مدى معنوية المعلمات المقدرة، مستخدماً Y_t و X_t مستخدماً بين Y_t مستخدماً Y_t

السؤال 4.3: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الآتية:

 $\hat{Y}_t = 21.5 + 0.84 X_t$ S.E (9.4) (0.024) n = 12 , $R^2 = 0.992$

حيث ان الأرقام بين قوسين تشير إلى الانحراف المعياري.

t (10, 0.05) = 2.23 أ- اختبر مدى معنوية المعلمات المقدرة ، مستخدماً $X_t \cdot Y_t$ مستخدماً $X_t \cdot Y_t$

السؤال 5.3: ماذا تعنى النتائج في المعادلة الآتية:

 $C_{*} = 20.12 + 0.31 \, Y_{*}$

حيث ان:

C: تمثل الأنفاق الخاص.

Y: تمثل الدخل المتاح.

 $\overline{Y} = 800$, $\overline{C} = 400$

السؤال 6.3: فرضاً باحث قدر دالة الاستهلاك وحصل على النتيجة الأتية:

$$\hat{C}_t = 15 + 0.81 \, Y_t$$
(3.1) (18.7) $n = 19$

حيث ان الأرقام بين القوسين تشير إلى قيمة (t) العملية.

أ- احسب الانحراف المعياري للمعالم المقدرة.

 (Y_i) مستخدماً ب- ضع حدود ثقة ولمستوى دلالة (95%) لمعامل المتغير المستقل $t(n-2,\alpha/2)=2.11$

السوال 7.3: إذا أعطيت الحسابات الوسطية الآتية عن الكمية المطلوبة من سلعة ما (Y) وسعرها (X).

$$\sum (X - \overline{X})^2 = 280$$
 , $\sum (Y - \overline{Y})^2 = 520$
 $\sum (X - \overline{X})(Y - \overline{Y}) = -360$, $\sum X = 40$, $\sum X = 100$, $n = 10$

قدر معلمات العلاقة $Y = b_0 + b_1 X$ معنوية واكتب جدول تحليل التباين واختير معنوية العلاقة المقدرة باستخدام اختبار (F) تحت مستوى معنوية (0.05) إذا علمت ان F الجدولية:

$$F = (0.05, 1.8) = 5.3$$

 $F = (0.05, 2.10) = 4.1$

السوال 8.3: قدر باحث دالة الاستيراد الآتية حيث يمثل (Y) الاستيراد ويمثل (X) الدخل القومي وذلك باستخدام عينة من عشرين مشاهدة.

$$Y = 200 + 0.5 X$$

S.E 20 0.04

أ- اختـبر المعنوية الإحصائية لمعلمة المتغير المستقل (X) فيما إذا كانت تختلف عن الصفر تحـت مستوى معنوية (0.05) موضحاً الفرضية الإحصائية المراد اختبارها.

ب-أوجد حدود الثقة لهذه المعلمة (معلمة X) عند مستوى دلالة 95% مع التعليق.

إذا علمت ان t الجدوليه:

$$t (0.025, 18) = 2.4$$

 $t (0.05, 20) = 2.1$

علماً بأن العمليات الحسابية الخاصة بمشاهدات المتغير (Y_t) و (X_t) كانت كالآتى:

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t = 30 , \sum_{t=1}^{5} Y_t^2 = 190 , \sum_{t=1}^{5} Y_t = 12 ,$$

$$\sum_{t=1}^{5} Y_t^2 = 34$$
, $\sum_{t=1}^{5} X_t Y_t = 74$

 B_1 و B_0 المطلوب: تقدير كل من

السوال 39.: تنص نظرية العرض على وجود علاقة طردية بين الكمية المعروضة من سلعة ما بالطن (Y_i) وسعرها بالدينار للكيلو غرام الواحد (X_i) .

أ- قدر العلاقة بين المتغيرين المذكورين باستخدام أسلوب الانحرافات.

ب- أوجد معامل التحديد من خلال قانون الانحر افات غير الموضحة.

السوال 10.3: البيانات الآتية تم الحصول عليها من عينة من الناتج للمدة (1985–1999) حيث X تمثل كمية الناتج و Y تمثل تكلفة الوحدة من الناتج.

$$\overline{X} = 7$$
 , $\overline{Y} = 9$, $\sum x_i y_i = -28$, $R^2 = 0.327$ $\sum X_i^2 = 795$, $F_{5\%} = 4.54$

أ- قدر دالة التكاليف.

 $\sum e_i^2$ ب- اختبر معنوية المعادلة المقدرة من خلال

السؤال 11.3: إذا أعطيت جدول تحليل التباين الآتى:

منوسط في الرجات الرجات المربعات الاتحرافات الحربة المربعات الاتحرافات الحربة المربعات الاتحرافات الاتحرافات الحربة المربعات الاتحرافات الحربة المربعات الاتحرافات الحربية المربعات الاتحرافات الحربية المربعات الاتحرافات الحربية المربعات الاتحرافات الحربية المربعات المربعات الاتحرافات المربعات المربعا							
الانحرافات الموضحة	?	?	23.43	2			
الانحرافات غير الموضحة	?	?	?	•			
الانحرافات الكلية	?	7					

أ- هل ان معادلة العرض الآتية معنوية ؟

$$\hat{Y} = 6.36 + 0.83 X_i$$

حيث ان X تمثل السعر.

ب- أختبر معنوية المعلمات.

جــ- قدر فترة ثقة %95 للمعلمة .b1

استفد من المعطيات الإحصائية الآتية:

$$R^2 = 0.65$$
, $F_{5\%} = 8.81$, $\sum x_i^2 = 34$

$$\overline{Y} = 13$$
 $\overline{X} = 8$ $\sum x_i y_i = 28$ $t_{5\%} = 2.45$

السؤال 12.3: ما هي الافتراضات الأساسية الخاصة بعنصر الخطأ في نموذج انحدار بسيط.

الفصل الرابع: الاتحدار الخطى المتعدد

Multiple Linear Regression

- 1.4 المقدمة.
- 2.4 النموذج الخطى المتعدد.
- 3.4 فرضيات النموذج الخطى المتعدد.
 - 4.4 طرق تقدير معاملات النموذج.
 - 1.4.4 طريقة المحددات.
 - 2.4.4 طريقة الانحرافات.
- 5.4 التباين والخطأ المعياري لمقدرات OLS.
- 6.4 اختبار فرضيات النموذج الخطي المتعدد.
 - 1.6.4 اختبار معنوية المعالم (t).
 - \mathbb{R}^2 معامل التحديد المتعدد، \mathbb{R}^2
 - 3.6.4 اختبار إحصائية F.
 - 7.4 تحليل جدول التباين، ANOVA.
 - 8.4 قياس حدود الثقة.

الأسئلة والتمارين.

الفصل الرابع: الانحدار الخطسي المتعدد

Multiple Linear Regression

1.4 مقدمــــة:

يتضح مما سبق أن الانحدار البسيط يركز على دراسة العلاقة بين متغيرين أحدهما المتغير المستقل (X) والآخر المتغير التابع (Y). غير أن واقع الحياط الاقتصادية والاجتماعية مبني بشكل عام على تأثر أية ظاهرة بأكثر من متغير مستقل فدالة الطلب مسثلاً، تحدد العلاقة بين الكميات المطلوبة من سلعة معينة، والأسعار الخاصة بهذه السلعة، وغيرها من السلع (أسعار السلع البديلة) ويدخل فيها دخل المستهلك كأحد المتغيرات فضلاً عن المتغيرات الأخرى. لذلك لابد من توسيع نموذج الانحدار السابق ليشتمل على انحدار المتغير التابع (Y) على العديد من المتغيرات المستقلة المستقلة المتعدد، المتعدد، المتعدد، المتعدد، المتعدد، النصونج الانحدار الخطي المتعدد، المستقلة المتعدد النصونة المتعدد، المتعدد،

يهدف هذا الفصل الى توضيح كيفية تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعددة السني يستكون من متغير تابع ومتغيرين أو أكثر من المتغيرات المستقلة. لذلك سيم مناقشة طبيعة نموذج الانحدار المتعدد، ثم تحديد أهم افتراضات النموذج التي سبق وأن تعرفنا عليها في الفصل الثاني، يضاف إلى ذلك بيان عدم وجود علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة وكيف ان المصفوفة (X'X)، تكون مصفوفة غير شاذة المتغيرات المستقلة وكيف ان المصفوفة (X'X)، تكون مصفوفة غير شاذة النموذج، تقدير التباين والتباين المشترك والانحراف المعياري لها للوصول إلى اختبار معاملات النموذج.

2.4 النموذج الخطي المتعدد:

يستند النموذج الخطي المتعدد على افتراض وجود علاقة خطية بين متغير Y_i وعدد من المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_k$ ، وحد عشوائي U_i ويُعبّر عـن هذه العلاقة، بالنسبة لـ u_i من المشاهدات و u_i من المتغيرات المستقلة، بالشكل u_i الآتى:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{i1} + B_2 X_{i2} + ... + B_k X_{ik} + U_i$$
 ...(1.4)

وفي واقع الأمر فان هذه المعادلة هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها (n) تكون نظام المعادلات الآتي:

$$\begin{split} Y_1 &= B_0 + B_1 X_{11} + B_2 X_{12} + ... + B_k X_{1k} + U_1 \\ Y_2 &= B_0 + B_1 X_{21} + B_2 X_{22} + ... + B_k X_{2k} + U_2 \\ \vdots &\vdots &\vdots &\vdots &\vdots \\ Y_n &= B_0 + B_1 X_{n1} + B_2 X_{n2} + ... + B_k X_{nk} + U_n \end{split}$$

هذه المعادلة تتضمن (k+1) من المعلمات المطلوب تقديرها علماً بان الحد الأول منها (B_0) يمثل الحد الثابت، الأمر الذي يتطلب اللجوء الى المصفوفات والمتجهات لتقدير عليه يمكن صياغة هذه المعادلات في صورة مصفوفات وكالآتي:

$$\begin{bmatrix} Y_{1} \\ Y_{2} \\ \vdots \\ Y_{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & X_{n} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{0} \\ B_{1} \\ \vdots \\ B_{k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_{0} \\ U_{1} \\ \vdots \\ U_{n} \end{bmatrix} \qquad \dots (2.4)$$

وباختصار

$$Y = XB + U \qquad ...(3.4)$$

حيث أن:

 \mathbf{Y} : متجه عمودي أبعاده $(\mathbf{n} \times \mathbf{1})$ يحتوي مشاهدات المتغير التابع.

 $x = n \times k + 1$ تحستوي مشاهدات المتغیرات المستقلة یحتوي $x = n \times k + 1$ عمودها الأول على قیم الواحد الصحیح لیمثل الحد الثابت.

B: متجه عمودي أبعاده $(k+1\times 1)$ يحتوي على المعالم المطلوب تقدير ها.

U: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على الأخطاء العشوائية.

وبما إن المعادلة (3.4) هي العلاقة الحقيقية المجهولة والمراد تقدير ها باستخدام الإحصاءات المستوفرة عن المتغير التابع، X، والمتغيرات المستقلة، $X_1, X_2, ..., X_k$ التالية: $X_1, X_2, ..., X_k$ $U: \sim N(0, \sigma^2 In)$

والذي يعني ان U_i يتوزع توزيعاً طبيعياً (N) متعدد المتغيرات لمتجه وسطه صغري (0) ومصفوفة تباين وتباين مشترك عددية هي $(\sigma^2 In)$.

3.4 فرضيات النموذج الخطى المتعدد:

عـند اسـتخدام طريقة OLS في تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد، فأنه يجب توافر الافتراضات الآتية:

 $E(U_i) = 0$ القيمة المتوقعة لمتجه حد الخطأ تساوى صفر أ أي إن، $E(U_i) = 0$

$$E(U_i) = E\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E(U_1) \\ E(U_2) \\ \vdots \\ E(U_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

2- تباين العناصر العشوائية ثابت، والتباين المشترك بينها يساوي صفراً، أي ان:

$$Cov(U) = E(UU') = \sigma^2 In$$

$$E(UU') = E \begin{vmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_n \end{vmatrix} \begin{bmatrix} U_1 & U_2 \cdots U_n \end{bmatrix}$$

$$= E \begin{bmatrix} U_1^2 & U_1 U_2 & \cdots & U_1 U_n \\ U_2 U_1 & U_2^2 & \cdots & U_2 U_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ U_n U_1 & U_n U_2 & \cdots & U_n^2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} E(U_1^2) & E(U_1U_2) & \cdots & E(U_1U_n) \\ E(U_2U_1) & E(U_2^2) & \cdots & E(U_2U_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ E(U_nU_1) & E(U_nU_2) & \cdots & E(U_n^2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} Var(U_1) & Cov(U_1U_2) & \cdots & Cov(U_1U_n) \\ Cov(U_2U_1) & Var(U_2) & \cdots & Cov(U_2U_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ Cov(U_nU_1) & Cov(U_nU_2) & \cdots & Var(U_n) \end{bmatrix}$$

$$\because \operatorname{var}(\mathbf{U}_i) = \mathbf{E}(\mathbf{U}_i^2) = \sigma^2$$

وان

$$Cov(U_iU_j) = E(U_iU_j) = 0$$
 $i \neq j$

$$E(UU') = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = = \sigma_n^2$$
 :ن

$$=\sigma^2\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&1\end{bmatrix}$$

$$=\sigma^2 In$$

وتسمى المصفوفة العددية أعلاه بمصفوفة التباين والتباين المشترك Variance- Covariance Matrix

المصفوفة، تباين قيم U بينما تبقى العناصر غير القطرية (أعلى وأسفل القطر) مساوية للصفر لانعدام التباين المشترك والترابط بين قيم U.

3- ليس هناك علاقة خطية تامة بين المتغيرات المستقلة كما وان عدد المشاهدات يجب ان يزيد على عدد المعلمات المطلوب تقديرها، أي ان:

$$r(x) = k + 1 < n$$

حيث إن (r) رتبة مصفوفة البيانات، (X) تساوي عدد المتغيرات المستقلة (k) زائداً (r) الحد الثابت، وهي أصغر من عدد المشاهدات (r). وهذه الفرضية ضرورية جداً لضمان إيجاد معكوس المصفوفة (x'x)، إذ إن انتفاء هذا الفرض يجعل رتبة المصفوفة (x) اقل من (r) وبالتالي فأن رتبة (r) التي تستخدم في الحصول على مقدرات OLS بدورها اقل من (r) وبالتالي لا يمكن إيجاد معكوسها بسبب ما يسمى بمشكلة الارتباط الخطي المتعدد، وبالتالي لا يمكن الحصول على مقدرات المربعات الصغرى العادية، OLS.

4.4 طرق تقدير معلمات النموذج:

في ضوء الفرضيات المذكورة أعلاه يمكن استخدام طريقة OLS في تقدير معلمات المنموذج الخطي المتعدد، ولهذا الغرض يمكن إعادة كتابة المعادلة (1.4) بصيغتها التقديرية كالآتى:

$$\hat{Y}_{i} = \hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}X_{i1} + \hat{B}_{2}X_{i2}$$

ولما كان هدفسنا هو الحصول على قيم كل من $\hat{B}_0, \hat{B}_1, \hat{B}_2$ التي تجعل مجموع مربعات الانحرافات اقل مايمكن، أي تصغير القيمة $\sum e_i^2$ (مبدأ المربعات الصغرى) إلى أقل قيمة ممكنة، أي:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^{n} e_{i}^{2}$$

$$\therefore e_{i} = Y_{i} - \hat{Y}_{i}$$

$$\sum e_{i}^{2} = \sum (Y_{i} - \hat{Y}_{i})^{2}$$

ومــن خـــلال الـــتعويض عــن \hat{Y}_i بما يساويها وأخذ المشتقات الجزئية بالنسبة الى $\hat{B}_2,\hat{B}_1,\hat{B}_0$

$$\sum e_i^2 = \sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})^2$$

$$\begin{split} \frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \hat{B}_0} &= 2\Sigma (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-1) = 0 \\ &- 2\Sigma (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0 \end{split}$$

بالقسمة على (2-) وفك القوس، نحصل:

$$\sum Y_{i} - n\hat{B}_{0} - \hat{B}_{1}\sum X_{i1} - \hat{B}_{2}\sum X_{i2} = 0$$

$$\sum Y_{i} = n\hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}\sum X_{i1} + \hat{B}_{2}\sum X_{i2} \qquad ...(4.4)$$

$$\frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2\Sigma (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i1}) = 0$$
$$-2\Sigma X_{i1} (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (2-) وفك القوس، نحصل:

$$\sum X_{i1} Y_i - \hat{B}_0 \sum X_{i1} - \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 - \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2} = 0$$

$$\sum X_{i1} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i1} + \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2} \qquad ...(5.4)$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2\sum (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2})(-X_{i2}) = 0$$
$$-2\sum X_{i2} (Y_i - \hat{B}_0 - \hat{B}_1 X_{i1} - \hat{B}_2 X_{i2}) = 0$$

بالقسمة على (2-) وفك القوس، نحصل:

وتمثل المعادلات (4.4)، (5.4) و (6.4) المعادلات الطبيعية الثلاث التي تستخدم في تقدير المعالم الثلاثة المجهولة $\hat{B}_2, \hat{B}_1, \hat{B}_0$. أن هذه المعادلات، يمكن حلها بإحدى الطرق الآتية:

1.4.4 طريقية المحددات:

 \hat{B}_k ويمكن ان تحل هذه المعادلات بواسطة قاعدة كرايمر للحصول على قيم \hat{B}_k من المعلمات وعلى النحو الآتى:

$$\sum Y_{i} = n\hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}\sum X_{i1} + \hat{B}_{2}\sum X_{i2}$$

$$\sum X_{i1} Y_i = \hat{B}_0 \sum X_{i1} + \hat{B}_1 \sum X_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum X_{i1} X_{i2}$$

$$\sum X_{i2}Y_{i} = \hat{B}_{0}\sum X_{i2} + \hat{B}_{1}\sum X_{i1}X_{i2} + \hat{B}_{2}\sum X_{i2}^{2}$$

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{Y}_i \\ \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i1} \boldsymbol{Y}_i \\ \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i2} \boldsymbol{Y}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} & \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i1} & \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i2} \\ \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i1} & \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i1}^2 & \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i1} \boldsymbol{X}_{i2} \\ \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i2} & \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i1} \boldsymbol{X}_{i2} & \boldsymbol{\Sigma} \boldsymbol{X}_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{B}}_0 \\ \hat{\boldsymbol{B}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{B}}_2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن إيجاد المحددات الآتية:

$$|D| = \begin{vmatrix} \sum Y_i & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_i & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}Y_i & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$|\mathbf{N}_1| = \begin{vmatrix} \mathbf{n} & \sum \dot{\mathbf{Y}}_i & \sum \mathbf{X}_{i2} \\ \sum \mathbf{X}_{i1} & \sum \mathbf{X}_{i1} \mathbf{Y}_i & \sum \mathbf{X}_{i1} \mathbf{X}_{i2} \\ \sum \mathbf{X}_{i2} & \sum \mathbf{X}_{i2} \mathbf{Y}_i & \sum \mathbf{X}_{i2}^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_i \\ |X_2| = \begin{vmatrix} \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^2 & \sum X_{i1}Y_i \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}Y_i \end{vmatrix}$$

$$\hat{B}_{1} = \frac{|N_{1}|}{|D|} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum Y_{i} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}Y_{i} & \sum X_{i1}X_{i2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum X_{i2} & \sum X_{i2}Y_{i} & \sum X_{i2}^{2} \\ \sum Y_{i} & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \end{vmatrix}} \frac{|\sum Y_{i}|}{|\sum X_{i1}Y_{i}|} \frac{|\sum X_{i2}|}{|\sum X_{i2}Y_{i}|} \frac{|\sum X_{i2}|}{|\sum X_{i2}Y_{i}|} \frac{|\sum X_{i1}X_{i2}|}{|\sum X_{i2}Y_{i}|} \frac{|\sum X_{i1}X_{i2}|}{|\sum X_{i2}Y_{i}|} \frac{|\sum X_{i1}X_{i2}|}{|\sum X_{i2}X_{i2}|}$$

$$\hat{B}_{2} = \frac{\begin{vmatrix} n & \sum X_{i1} & \sum Y_{i} \\ \sum X_{i1} & \sum X_{i1}^{2} & \sum X_{i1}Y_{i} \\ \sum X_{i2} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}Y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \sum Y_{i} & \sum X_{i1} & \sum X_{i2} \\ \sum X_{i1}Y_{i} & \sum X_{i1}^{2} & \sum X_{i1}X_{i2} \\ \sum X_{i2}Y_{i} & \sum X_{i1}X_{i2} & \sum X_{i2}^{2} \end{vmatrix}}$$

أما بالنسبة لـ $\hat{\mathbf{B}}_0$ فيتم الحصول عليه عن طريق:

$$\hat{\textbf{B}}_0 = \overline{\textbf{Y}} - \hat{\textbf{B}}_1 \overline{\textbf{X}}_1 - \hat{\textbf{B}}_2 \overline{\textbf{X}}_2$$

2.4.4 طريقة الاحرافات:

ويمكن تقدير معاملات الانحدار المتعدد باستخدام أسلوب الانحرافات أو ما يسمى بالمتوسطات، أي انحرافات القيم الأصلية عن وسطها الحسابي وكالآتي:

ولهذا الغرض نأخذ نموذج يحتوي متغيرين مستقلين X_1 و X_2

$$\hat{Y}_{i} = \hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}X_{i1} + \hat{B}_{2}X_{i2} + e_{i}$$

وبأخذ المتوسط لهذه المعادلة:

$$\overline{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 \overline{X}_1 + \hat{B}_2 \overline{X}_2 + \overline{e}_i \qquad , \ \overline{e}_i = 0$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i} - \overline{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{B}}_{1}(\mathbf{X}_{i1} - \overline{\mathbf{X}}_{1}) + \hat{\mathbf{B}}_{2}(\mathbf{X}_{i2} - \overline{\mathbf{X}}_{2}) + \mathbf{e}_{i}$$

$$\hat{y}_i = \hat{B}_1 x_{i1} + \hat{B}_2 x_{i2} + e_i$$
or

 $: \overline{\hat{Y}} = \overline{Y}$ اثبات أن

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i} = \hat{\mathbf{B}}_{o} + \hat{\mathbf{B}}_{1} \mathbf{X}_{i} \qquad \cdots (1)$$

وبــــادخال كي على طرفي المعادلة أعلاه، نحصل على:

$$\sum \hat{\mathbf{Y}}_i = n\hat{\mathbf{B}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_1 \sum \mathbf{X}_i$$

وبالقسمة على n:

$$\frac{\sum \hat{Y}_i}{n} = \hat{B}_0 \frac{n}{n} + \hat{B}_1 \frac{\sum X_i}{n}$$

$$\overline{\hat{Y}}_{i} = \hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}\overline{X}_{i} \qquad \dots (2)$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{X}}_i \qquad \dots (3)$$

$$\therefore \overline{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{B}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{X}}_1 \qquad \dots (4)$$

وبطرح المعادلة (4) من المعادلة (2) نحصل:

$$\overline{\hat{\mathbf{Y}}_{i}} - \overline{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{B}}_{0} + \hat{\mathbf{B}}_{1} \overline{\mathbf{X}}_{i} - \hat{\mathbf{B}}_{0} - \hat{\mathbf{B}}_{1} \overline{\mathbf{X}}_{i}$$

وبعد الاختصار في الطرف الأيمن، نحصل:

$$\overline{\hat{Y}}_i - \overline{Y} = 0$$

ومنها يكون:

$$\therefore \overline{\hat{Y}}_i = \overline{Y}$$

$$y_i = \hat{B}_1 x_{i1} + \hat{B}_2 x_{i2} + e_i$$
 (i = 1,2,3,...,n) ...(7.4)

وفي واقع الأمر فأن المعادلة أعلاه هي واحدة من جملة معادلات يبلغ عددها n معادلة تكون نظام المعادلات التالى:

$$y_{1} = B_{1}x_{11} + B_{2}x_{12} + \dots + B_{k}x_{1k} + e_{1}$$

$$y_{2} = B_{1}x_{21} + B_{2}x_{22} + \dots + B_{k}x_{2k} + e_{2}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$y_{n} = B_{1}x_{n1} + B_{2}x_{n2} + \dots + B_{k}x_{nk} + e_{n}$$

ويمكن التعبير عن المعادلات أعلاه في هيئة مصفوفة وكما يلى:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1k} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{B}_1 \\ \hat{B}_2 \\ \vdots \\ \hat{B}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}$$

حيث يمكن التعبير عن ذلك بصيغة المصفوفات:

$$y = x\hat{B} + e$$

حيث أن:

y: متجه عمودي أبعاده $(n \times 1)$ يحتوي على انحر افات قيم المتغير التابع.

 $n \times k - 1$ تحتوي على انحرافات قيم المتغيرات المستقلة $n \times k - 1$ حيث أنها لا تتضمن العمود الأول الذي يمثل الحد الثابت. حيث يمكن بذلك استخراج الحد الثابت \hat{B}_0 من خارج المصفوفة باستخدام القانون الآتي:

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{X}}_1 - \hat{\mathbf{B}}_2 \overline{\mathbf{X}}_2$$

Or

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - (\hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{X}}_1 + \hat{\mathbf{B}}_2 \overline{\mathbf{X}}_2)$$

 \hat{B} : متجه عمودي أبعاده $(k-l\times l)$ تحتوي على المعالم المجهولة. \hat{B} : متجه عمودي أبعاده $(n\times l)$ يحتوي على البواقي.

ويمكن التوصل إلى مصفوفة الانحرافات باتباع الخطوات التالية: بإعادة كتابة المعادلة (7.4) على النحو الآتى:

$$e_i = y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}$$

ولما كانت افضل طريقة للحصول على أصغر قيمة ممكنة للانحرافات تتم بواسطة تربيعها وبجعل مجموع مربعاتها اصغر ما يمكن. وباخذ المشتقة الجزئية لها بالنسبة لكل من \hat{B}_2 , \hat{B}_1 ومساواتها بالصفر نحصل على:

$$\sum e_i^2 = \sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})^2$$

$$\frac{\partial \sum e_i^2}{\partial \hat{B}_1} = 2\sum (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2})(-x_{i1}) = 0$$
$$-2\sum x_{i1} (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}) = 0$$
147

وبالقسمة على (2-) وفك القوس، نحصل على:

$$\sum x_{i1}y_i - \hat{B}_1 \sum x_{i1}^2 - \hat{B}_2 \sum x_{i1}x_{i2} = 0$$

$$\sum x_{i1}y_i = \hat{B}_1 \sum x_{i1}^2 + \hat{B}_2 \sum x_{i1}x_{i2} \qquad ...(8.4)$$

$$\begin{split} \frac{\partial \Sigma e_i^2}{\partial \hat{B}_2} &= 2\Sigma (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}) (-x_{i2}) = 0 \\ &- 2\Sigma x_{i2} (y_i - \hat{B}_1 x_{i1} - \hat{B}_2 x_{i2}) = 0 \end{split}$$

وبالقسمة على (2-) وفك القوس، نحصل:

$$\sum x_{i2}y_i - \hat{B}_1 \sum x_{i1}x_{i2} - \hat{B}_2 \sum x_{i2}^2 = 0$$

$$\sum x_{i2}y_i = \hat{B}_1 \sum x_{i1}x_{i2} + \hat{B}_2 \sum x_{i2}^2 \qquad ...(9.4)$$

ويمكن صباغة المعادلتين أعلاه على شكل مصفوفة وكالآتى:

$$\begin{bmatrix} \sum x_{i1}y_i \\ \sum x_{i2}y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_{i1}^2 & \sum x_{i1}x_{i2} \\ \sum x_{i1}x_{i2} & \sum x_{i2}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \hat{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix}$$

ومن النظام أعلاه، يمكن أعاده كتابته بالشكل التالى:

$$x'y = (x'x)\hat{B}$$

وعليه فأن تقدير المعالم باستخدام المصفوفة بأسلوب الانحرافات يأخذ الصيغة التالية:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{y}$$

وبعد احتساب المتجه x'y ومحدد المصفوفة |x'x| الذي ينبغي ان لا يساوي صفراً نوجد مقلوب المصفوفة الذي هو عبارة عن $\frac{\mathrm{adj}(x'x)}{|x'x|} = \frac{\mathrm{adj}(x'x)}{|x'x|}$ ومن ثم تطبيق القانون أعلاه. أما $\hat{\mathbf{B}}_0$ فيمكن حسابه بموجب القانون الآتي:

$$\hat{\boldsymbol{B}}_0 = \overline{\boldsymbol{Y}} - \hat{\boldsymbol{B}}_1 \overline{\boldsymbol{X}}_1 - \hat{\boldsymbol{B}}_2 \overline{\boldsymbol{X}}_2$$

هذا ويمكن استخراج القيم بالانحرافات دون الرجوع الى البيانات الأصلية وكما مبين أدنـــاه:

$$\sum y_i^2 = \sum Y_i^2 - \frac{(\sum Y_i)^2}{n}$$
$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n}$$

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

$$\sum \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 = \sum \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 - \frac{(\sum \mathbf{X}_1)(\sum \mathbf{X}_2)}{n}$$

وبعد استخدام الحاسوب، فقد اصبح من السهل على الباحث الاقتصادي ان يحصل على النتائج من خلال أجادته استخدام إحدى البرامجيات الإحصائية أمثال EXCEL، STATS، SPSS، ولا يحتاج إلى استخدام الصيغ أعلاه في الجوانب التطبيقية، ولكن تم عرضها هنا لمعرفة كيفية عمل الانحدار المتعدد.

مثـال 1.4: الجـدول الآتـي يتضمن البيانات الخاصة بالاستير ادات كمتغير تابع (Y) والدخل القومي كمتغير مستقل أول (X_1) وأسعار الاستير ادات كمتغير مستقل ثاني (X_2) في أحد الدول للمدة (X_2) والمطلوب هو تقدير معالم العلاقة أعلاه:

	الاستيرادات	الدخل القومي	السعر		
السنة	Y	$\mathbf{X_{1}}$	X_2	X_1Y	X_2Y
1985	100	100	100	10000	10000
1986	106	104	99	11024	10494
1987	107	106	110	11342	11770
1988	120	111	126	13320	15120
1989	110	111	113	12210	12430
1990	116	115	103	13340	11948
1991	124	120	102	14880	12648
1992	133	124	103	16492	13699
1993	137	126	98	17262	13426
n = 9	$\sum Y =$	$\sum X_1 =$	$\sum X_2 =$	$\sum X_1 Y =$	$\sum X_2 Y =$
11 - 3	1053	1017	954	119870	111535

الحل:

X_1X_2	X_1^2	X_2^2	Y^2
10000	10000	10000	10000
10296	10816	9801	11236
11660	11236	12100	11449
13986	12321	15876	14400
12543	12321	12769	12100
11845	13225	10609	13456
12240	14400	10404	15376
12772	15376	10609	17689
12348	15876	9604	18769
$\sum X_1 X_2 =$	$\sum X_1^2 =$	$\sum X_2^2 =$	$\sum Y^2 =$
107690	115571	101772	124475

$$\sum x_1 y = \sum X_1 Y - \frac{(\sum X_1)(\sum Y)}{n}$$

$$= 119870 - \frac{(1017)(1053)}{9}$$

$$= 119870 - 118989$$

$$= 881$$

$$\sum x_2 y = \sum X_2 Y - \frac{(\sum X_2)(\sum Y)}{n}$$

$$= 111535 - \frac{(954)(1053)}{9}$$

$$= 111535 - 111618$$

$$= -83$$

$$\sum x_1 x_2 = \sum X_1 X_2 - \frac{(\sum X_1)(\sum X_2)}{n}$$

$$= 107690 - \frac{(1017)(954)}{9}$$

$$= 107690 - 107802$$

$$= -112$$

$$\sum x_1^2 = \sum X_1^2 - \frac{(\sum X_1)^2}{n}$$

$$= 115571 - \frac{(1017)^2}{9}$$

$$= 115571 - 114921$$

$$= 650$$

$$\sum x_2^2 = \sum X_2^2 - \frac{(\sum X_2)^2}{n}$$

$$= 101772 - \frac{(954)^2}{9}$$
$$= 101772 - 101124$$
$$= 648$$

$$\sum y^2 = \sum Y^2 - \frac{(\sum Y)^2}{n}$$

$$= 124475 - \frac{(1053)^2}{9}$$

$$= 124475 - 123201$$

$$= 1274$$

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{y}$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{|x'x|} \operatorname{adj} (x'x)$$

$$|\mathbf{x}'\mathbf{x}| = \begin{vmatrix} \sum \mathbf{x}_1^2 & \sum \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 \\ \sum \mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2 & \sum \mathbf{x}_2^2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 650 & -112 \\ -112 & 648 \end{vmatrix}$$

$$= (650)(648) - (-112)(-112)$$
$$= 421200 - 12544$$

$$=408656$$

$$(x'x)^{-1} = \frac{1}{408656} \begin{bmatrix} 648 & 112 \\ 112 & 650 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069 \\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix}$$

$$(x'y) = \begin{bmatrix} \sum x_1 y \\ \sum x_2 y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B} = (x'x)^{-1}x'y$$

$$= \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069 \\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1.396988485 + (-0.022747727) \\ 0.241454789 + (-0.132018057) \end{bmatrix}$$

لذلك سيكون:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_1 \\ \hat{\mathbf{B}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.374240758 \\ 0.109436732 \end{bmatrix}$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}_1 - \hat{B}_2 \overline{X}_2$$
= 117 - (1.374240758) (113)-(0.109436732) (106)

$$= 117 - 155.2892057 - 11.60029359$$
$$= -49.88949929$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{B}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{X}_1 + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{X}_2$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = -49.88949929 + 1.374240758 \mathbf{X}_1 + 0.109436732 \mathbf{X}_2$$

وتشير المعادلة التقديرية أعلاه إلى وجود علاقة طردية بين المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات والمتغير المستقل X_1 الذي يمثل الدخل القومي فكل زيادة في X_1 بمقدار وحدة واحدة تزداد Y بمقدار (1.374) وحدة مع ثبات أثر X_2 . كما تشير هذه المعادلة إلى وجود علاقة طردية بين الاستيرادات والمتغير المستقل X_2 الذي يمثل السعر، فبزيادة X_2 بمقدار وحدة واحدة تزداد الاستيرادات بمقدار (0.109) وحدة مع شبات أشر X_1 وهذا مخالف لمنطق النظرية الاقتصادية إذ تشير النظرية الى وجود علاقة عكسية بين السعر والاستيرادات.

5.4 التباين والخطأ المعياري لمقدرات OLS:

مصفوفة التباين والتباين المشترك لمقدرات نموذج الانحدار الخطي المتعدد: في حالية K مين المتغيرات المستقلة فان التباين إلى B_k يمكن الحصول عليه كميا يلي:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\therefore \mathbf{Y} = \mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{U}$$

وبالتعويض في المعادلة أعلاه، نحصل:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\mathbf{B} + \mathbf{U})$$

ويمكن إعادة كتابة هذه المعادلة كما يلي:

$$\hat{B} = (X'X)^{-1}X'XB + (X'X)^{-1}X'U$$

ولما كانت:

$$(X'X)^{-1}X'X = 1$$

فأن:

$$\hat{\mathbf{B}} = \mathbf{B} + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{U}$$

وبأخذ التوقع لطرفي المعادلة:

$$E(\hat{B}) = B + E[(X'X)^{-1}X'U]$$

$$= B + (X'X)^{-1}X' E(U)$$

$$:: E(U) = 0$$

$$\therefore E(\hat{B}) = B$$

إذن \hat{B} هــي عــبارة عن مقدار غير متحيز الى B الحقيقية. ويمكن الحصول على تبــايــن قيمــة المعــلمة المقدرة \hat{B} حيث يؤدي ذلك الى مصفوفة التبــاين والتباين المشترك الخاصة بالمتحه \hat{B} :

$$\hat{B} - E(\hat{B}) = \hat{B} - B = (X'X)^{-1}X'U$$

var
$$(\hat{B}) = E \{ [\hat{B} - E(\hat{B})] [\hat{B} - E(\hat{B})]' \}$$

$$: E(\hat{B}) = B$$

$$var(\hat{B}) = E \left\{ (\hat{B} - B) (\hat{B} - B)' \right\}$$

$$= E \left\{ [(X'X)^{-1}X'U] [(X'X)^{-1}X'U]' \right\}$$

$$= E \left\{ (X'X)^{-1} X'UU'X (X'X)^{-1} \right\}$$
$$= (X'X)^{-1} X' E(U'U) X (X'X)^{-1}$$

ولما كانت:

$$E(UU') = \sigma^2 In$$

$$var(\hat{B}) = (X'X)^{-1}X' \cdot \sigma^2 In \cdot X(X'X)^{-1}$$

وبإعادة الترتيب، نحصل:

$$var(\hat{B}) = \sigma^2 In (X'X)^{-1} X'X (X'X)^{-1}$$

$$(X'X)^{-1}X'X = I$$
 مصفوفة الوحدة

$$\therefore \operatorname{var}(\hat{B}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

هذا يعني أن قيمة تباين أي عنصر من عناصر المتجة (\hat{B}) هو عبارة عن حاصل ضرب قيمة σ^2 بما يقابلها من العناصر الواقعة على القطر الرئيسي لمقلوب المصفوفة $(X'X)^{-1}$. أما التباين المشترك بين أي أثنين من عناصر المتجة (\hat{B}) فهو عبارة عن حاصل ضرب σ^2 بالعنصر المقابل لها والواقع خارج القطر الرئيسي لمقلصوب المصفوفة $(X'X)^{-1}$. ويمكن توضيح ذلك لنموذج الانحدار الخطي المتعدد الذي يحتوي على متغيرين مستقلين، وكما يلي:

$$var(\hat{B}) = \sigma^2 (X'X)^{-1}$$

$$= \frac{\sigma^2}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \begin{bmatrix} \sum X^2 & -\sum X \\ -\sum X & n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma^2 \sum X^2}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} & \frac{-\sigma^2 \sum X}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \\ \frac{-\sigma^2 \sum X}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} & \frac{n \sigma^2}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} \end{bmatrix}$$

$$\operatorname{var}(\hat{\mathbf{B}}_0) = \frac{\sigma^2 \sum \mathbf{X}^2}{n \sum \mathbf{X}^2 - (\sum \mathbf{X})^2} = \sigma^2 \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{\mathbf{X}}^2}{\sum \mathbf{X}^2} \right]$$

$$\operatorname{var}(\hat{\mathbf{B}}_1) = \frac{n \ \sigma^2}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{\sigma^2}{\sum X^2}$$

$$\operatorname{Cov}(\hat{B}_0, \hat{B}_1) = \frac{-\sigma^2 \sum X}{n \sum X^2 - (\sum X)^2} = \frac{-\sigma^2 \overline{X}}{\sum X^2}$$

أما الصيغة التقديرية لتباين الخطأ العشروائي، σ^2 ، (S^2 e) فيمكن الوصول أليها كالآتى:

$$S^2e = \frac{e'e}{n-k-1}$$
 ...(10.4)

$$e'e = (Y - \hat{Y})'(Y - \hat{Y})$$

$$\therefore \hat{Y} = X\hat{B}$$

$$e'e = (Y - X\hat{B})'(Y - X\hat{B})$$

$$= Y'Y - Y'X\hat{B} - \hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B}$$
...(11.4)

وبما أن الحدين الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة، كما وأن كلاً منهما يمثل مبدلة الآخر، فان:

$$Y'X\hat{B} = (Y'X\hat{B})' = YX'\hat{B}'$$

عليه يمكن إعادة كتابة المعادلة (11.4) بالشكل التالى:

$$e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'X\hat{B}$$
 ...(12.4)

$$\therefore \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

$$\therefore (X'X)\hat{B} = X'Y$$

$$e'e = Y'Y - 2\hat{B}'X'Y + \hat{B}'X'Y$$
 ...(13.4)

$$e'e = Y'Y - \hat{B}'X'Y$$
 ...(14.4)

وبتعويض هذه القيمة في البسط من المعادلة (10.4) نحصل:

$$S^2e = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n - k - 1}$$

6.4 اختبار فرضيات النموذج الخطى المتعدد:

يهدف هذا المبحث إلى توسيع معارفنا الأساسية لنموذج الانحدار وذلك بأجراء اختبار معنوية الانحدار المتعدد والمقدر باستخدام توزيع اختبار إحصاءه F ومقارنته باختسبار f ومسن شم تقييم كفاءة الأداء العام لنموذج الانحدار المتعدد R^2 ومقارنته بمعسامل الستحديد المقدر المعدل \overline{R}^2 ، وكذلك اختبار العلاقة بين F و من خلال جدول تحليل التباين، F F من علاقة F بقيمة المتغير العشوائي، F F .

1.6.4 اختبار معنوية المعالم (t):

 $X_1, X_2, ..., X_k$ يستخدم اختبار (t) لتقييم معنوية تأثير المتغيرات المستقلة y عند تناول اختبار في المتغير التابع y في نموذج الانحدار الخطى البسيط، انه يعتمد على نوعين من الفروض: (t) في نموذج الانحدار الخطى البسيط،

$$B_1 = B_2 = B_3 = = B_k = 0 : H_0$$
 فرضية العدم
$$B_1 \neq B_2 \neq B_3 \neq \neq B_k = 0 : H_1$$
 الفرضية البديلة

وبعد احتساب قيمة (t) تقارن مع قيمتها الجدولية لتحديد قبول او رفض فرضية العدم ومن ثم تقييم معنوية معلمات النموذج المقدر، والصيغة الرياضية لهذا الاختبار يُمكن بيانها كما يلي:

أ- بالنسبة الى B،

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}}$$

$$S_{\hat{B}_l} = \sqrt{S_{\hat{B}_l}^2}$$

$$S_{\hat{B}_1}^2 = var(\hat{B}_1) = S^2 e \ a_{11}$$

 $var(\hat{B}) = S^2 e(x'x)^{-1}$

$$S^{2}e = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n-k-1} = \frac{\sum y^{2} - (\hat{B}_{1} \sum x_{1}y + \hat{B}_{2} \sum x_{2}y)}{n-k-1}$$

ب- بالنسبة الي B₂:

$$t\hat{B}_2 = \frac{\hat{B}_2}{S\hat{B}_2}$$

$$S_{\hat{B}_2} = \sqrt{S_{\hat{B}_2}^2}$$

$$S_{\hat{B}_2}^2 = var(\hat{B}_2) = S^2 e \quad a_{22}$$

$$S^2e = \frac{e'e}{n-k-1}$$

وبالرجوع إلى المثال 1.4، يمكن تقييم معنوية المعلمات
$$\hat{B}_1$$
 وكالآتي:

أ- بالنسبة الى B:

$$S^{2}e_{i} = \frac{e'e}{n-k-1} = \frac{Y'Y - \hat{B}'X'Y}{n-k-1} = \frac{\sum y^{2} - (\hat{B}_{1}\sum x_{1}y + \hat{B}_{2}\sum x_{2}y)}{n-k-1}$$

$$= \frac{1274 - (1.374240758)(881) - (0.109436732)(-83)}{9 - 2 - 1}$$

$$= \frac{1274 - 1210.706108 + 9.083248756}{6}$$

$$= \frac{72.37714076}{6} = 12.06285679$$

$$var - cov(\hat{B}) = S^{2}e_{i}(x'x)^{-1}$$

$$= 12.06285679 \begin{bmatrix} 0.001585685 & 0.000274069\\ 0.000274069 & 0.001590579 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.019127891 & 0.003306055\\ 0.003306055 & 0.019186926 \end{bmatrix}$$

$$\therefore \text{var}(\hat{B}_1) \text{ or } S_{\hat{B}_1}^2 = 0.019127891$$

$$S_{\hat{B}_1} = \sqrt{S_{\hat{B}_1}^2} = \sqrt{0.019127891} = 0.138303618$$

$$t_{\hat{B}_2} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}^2} = \frac{1.374240758}{0.138303618} = 9.936404975$$

وبما إن قيمة $(t\hat{B}_1)$ المحتسبة والبالغة (9.93) اكبر من مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45) ، عليه ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، أي ان \hat{B}_1 معنوي.

ب- بالنسبة الى B₂:

$$S^2e = 12.06285679$$

 $var(\hat{B}_2)$ or $S^2_{\hat{B}_2} = 0.019186926$
 $S_{\hat{B}_2} = \sqrt{S^2_{\hat{B}_2}} = \sqrt{0.019186926} = 0.138516879$
 $t_{\hat{B}_2} = \frac{\hat{B}_2}{S_{\hat{B}_2}} = \frac{0.109436732}{0.138516879} = 0.790060625$

وبما إن قيمة $(t\hat{B}_2)$ المحتسبة والبالغة (0.79) اقل من مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (6) والبالغة (2.45)، عليه تقبل فرضية العدم، أي عدم معنوية المعلمة المقدرة (\hat{B}_2) .

:Multiple Coefficient of Determination (\mathbb{R}^2) معامل التحديد المتعدد، 2.6.4

ويعد مؤشر اساس في تقييم مدى معنوية العلاقة بين المتغير التابع (Y) والمتغيرات المستقلة (X_k) ، إذ $(k=1,2,\ldots,k)$ ، بعبارة اخرى هو مقياس يوضح نسبة مساهمة المتغيرات المستقلة في تفسير التغير الحاصل في المتغير التابع. ويمكن اشتقاقه باستخدام المصفوفات بالانحرافات كالآتى:

$$y = x \hat{B} + e$$

$$e = y - x \hat{B}$$

$$e'e = (y - x\hat{B})' (y - x\hat{B})$$

$$e'e = y'y - y'x\hat{B} - x'\hat{B}'y + \hat{B}'x'x\hat{B}$$

وبما ان الحدين الثاني والثالث يمثلان قيمة واحدة كما وان كلاً منها يمثل مبدلاً للآخر فان:

$$\therefore e'e = y'y - 2\hat{B}'x'y + \hat{B}'x'x\hat{B}$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{x}'\mathbf{x})^{-1}\mathbf{x}'\mathbf{y}$$

$$(x'x)\hat{B} = x'y$$

$$e'e = y'y - 2\hat{B}'x'y + \hat{B}'x'y$$

$$e'e = y'y - \hat{B}'x'y$$

بذلك يمكن كتابة معادلة الانحرافات الكلية كالآتى:

$$y'y = \hat{B}'x'y - e'e$$

إذ ان:

y'y: تمثل الانحرافات الكلية.

B'x'y: تمثل الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار.

e'e: تمثل الانحرافات غير الموضحة.

وبما ان معامل التحديد R^2 عبارة عن نسبة الانحرافات الموضحة من قبل خط الانحدار الى الانحرافات الكلية، Total variation، فانه يمثل نسبة مجموع مربعات التغير في المتغيرات المستقلة إلى مجموع المربعات الكلية:

$$\therefore R^2 = \frac{\hat{B}'x'y}{y'y} = \frac{\hat{B}'x'y}{\sum y^2}$$

or

$$R^2 = 1 - \frac{e'e}{v'v - n\overline{Y}^2}$$

or

$$R^{2} = \frac{\hat{B}_{1} \sum_{x_{1}} y + \hat{B}_{2} \sum_{x_{2}} y}{\sum_{y}^{2}}$$

إن إضافة متغيرات مستقلة جديدة الى المعادلة يؤدي الى رفع قيمة R^2 ، وذلك الثبات قيم فيمة ألمقيام وتغير قيمة البسط بمقدار ($\hat{B}xy$) غير إن الاستمرار بإضافة المتغيرات المستقلة سيؤدي الى انخفاض درجات الحرية (n-k-1)، مما يتطلب استخراج معامل التحديد المعدل او المصحح R^2 وعلى النحو الآتى:

$$\overline{R}^2 = 1 - \left[(1 - R^2) \frac{n - 1}{n - k - 1} \right]$$

وبالسرجوع إلى المثال 1.4، يمكن معرفة نسبة مساهمة X_1 و X_2 في التغير الحاصل في Y وكالآتي:

$$R^{2} = \frac{\hat{B}'x'y}{\sum y^{2}} = \frac{\begin{bmatrix} 1.374240758 & 0.109436732 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 881 \\ -83 \end{bmatrix}}{1274}$$
$$= \frac{1210.706108 - 9.083248756}{1274}$$
$$= \frac{1201.622859}{1274} = 0.943189057 = \%94.3$$

$$R^{2} = \frac{\hat{B}_{1} \sum x_{1}y + \hat{B}_{2} \sum x_{2}y}{\sum y^{2}}$$

$$= \frac{(1.374240758)(881) + (0.109436732)(-83)}{1274}$$

$$= \frac{1210.706108 - 9.083248756}{1274}$$

$$= \frac{1201.622859}{1274} = 0.943189057 = \%94.3$$

 \overline{R}^2 أما معامل التحديد المصحح

$$\overline{R}^2 = 1 - \left[(1 - R^2) \frac{n - 1}{n - k - 2} \right]$$

$$= 1 - \left[(1 - 0.943189057) \frac{9 - 1}{9 - 2 - 1} \right]$$
$$= 1 - \left[(0.056810943)(1.3333333333) \right]$$

هذا يعني ان المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 يفسر ان حوالي 92.4% من التغير الحاصل في المتغير التابع Y وان النسبة الباقية والبالغة حوالي 7.6% تمثل تأثير متغير التأخرى لم تدخل في المعادلة.

= 1 - 0.075747924 = 0.924252076 = %92.4

F-Statistics ، F اختبار إحصائية 3.6.4

يستهدف هذا الاختبار معرفة مدى معنوية العلاقة الخطية بين المتغيرات المستقلة $X_1, X_2, ..., X_k$ المستقلة $X_1, X_2, ..., X_k$ فانه يعتمد على نوعين من الفروض:

فرضية العدم H_0 : وتنص على انعدام العلاقة بين كل متغير من المتغيرات المستقلة $(X_1, X_2, ..., X_k)$

$$H_0: \hat{B}_1 = \hat{B}_2 = ... = \hat{B}_k = 0$$

الفرضية البديلة H₁: وتنص على وجود علاقة معنوية بين المتغيرات المستقلة والمتغير التابع، أي:

$$H_1: \hat{B}_1 \neq \hat{B}_2 \neq ... \neq \hat{B}_k \neq 0$$

والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هي:

$$F = \frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$$

or

$$F = \frac{R^2 / k}{1 - R^2 / n - k - 1}$$

وبعد احتساب قيمة T تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (k) و (n-k-1) للبسط والمقام ولمستوى معنوية معين. فإذا كانت القيمة المحتسبة اكبر من القيمة الجدولية تسرفض H_0 وتقليل H_1 أي ان العلاقة المدروسة معنوية، وهناك على الاقل متغير مستقل واحد من المتغيرات X_k ذو تأثير في Y. اما اذا كانت القيمة المحتسبة اصغر من الجدولية فان ذلك يعني قبول H_0 أي ان العلاقة الخطية المدروسة غير معنوية أي انه ليس ثمة تأثير من أي متغير من المتغيرات المستقلة على المتغير التابع.

وبالرجوع إلى بيانات مثالنا 1.4 يمكن اختبار معنوية العلاقة المقدرة وكالآتي:

$$F = \frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$$
$$= \frac{1201.622859/2}{72.37714076/9-2-1}$$

$$=\frac{600.8114295}{12.06285679}=49.8067282$$

$$F = \frac{R^2/k}{1 - R^2/n - k - 1}$$

$$= \frac{0.943189057/2}{1 - 0.943189057/6} = \frac{0.471594528}{0.00946849} = 49.8067$$

وبما ان قيمة (F) المحتسبة والبالغة (49.8) اكبر من قيمة (F) الجدولية عند مستوى معنوية (5.14) ودرجة حرية (2, 6) للبسط والمقام والبالغة (5.14)، عليه ترفض فرضية العدم التي تنص على عدم معنوية العلاقة الخطية المقدرة وتقبل الفرضية السبديلة التي تنص على معنوية العلاقة المقدرة. بعبارة أخرى، ان هناك على الأقل تأثير لأحد المتغيرين X_2 , X_3 على المتغير التابع X_4 .

7.4 تحليل جدول التباين، ANOVA:

لغرض الوقوف على تأثير كل من X_1 في المتغير التابع Y، لابد من عمل جدول تحليل التباين لبيان أثر المتغيرين المستقلين X_2 ، X_1 في النموذج.

جدول تحليل التباين

مصدر التباين	مجموع مربعات الخطأ	درجات الحرية	متوسط مربعات الخطأ	اختبار F
الانحراف الموضح من قبل X ₁ وX	в̂'х'у 1201.622859	K 2	Ê'x'y / k 600.8114295	$F = \frac{\hat{B}'x'y/k}{e'e/n-k-1}$ $= \frac{600.8114295}{e'}$
الانحراف غير الموضح	e'e 72.37714076	n-k-1 6	e'e/n-k-1 12.06285679	= 49.8067
الانحر اف الكلي	y'y 1274	n–k 8		

ولمعرفة تأثير كل متغير مستقل في المتغير التابع بصورة منفردة فإننا نختبر خلل المرحلة الاولى تأثير المتغير X_1 بصورة مستقلة في Y. وفي المرحلة الثانية نختبر تأثير المتغير X_2 بصورة مستقلة في Y. وبالرجوع إلى مثالنا نختبر ما يلي:

أولاً: تأثير عنصر الدخل X1 في الاستيرادات Y:

لغرض اختبار التأثير المستقل لعنصر الدخل (X_1) في دالة الاستير ادات (Y) يجب معرفة مقدار الزيادة المتحققة في قيمة مجموع مربعات الانحر افات الموضحة

من قبل خط انحدار المتغير التابع Y على المتغير المستقل X_2 نتيجة اضافة المتغير X_1 الى الدالة، ويتم ذلك بافتراض نموذج يتضمن المتغير X_2 أى ان:

$$Y_i = B_0 + B_2 X_2 + U_i$$

$$\hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{B}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_2 \mathbf{X}_2$$

$$\hat{B}_2 = \frac{\sum x_2 y}{\sum x_2^2} = \frac{-83}{648} = -0.128086419$$

أما مجموع مربعات الانحرافات الناجمة عن المتغير X2 فهي:

$$\hat{B}_2 \sum x_2 y = (-0.128086419)(-83)$$
$$= 10.63117284$$

أما التأثير الذي يضيفه المتغير المستقل X1 الى الدالة فهو:

$$\hat{B}_1 \sum x_1 y = \hat{B}' X' y - \hat{B}_2 \sum x_2 y$$
= 1201.622859 - 10.63117284
= 1190.991686

و لاختبار مدى معنوية هذا التأثير المضاف من قبل المتغير المستقل X_1 ننظم جدول تحليل التباين الآتى:

تحليل التأثير المستقل للمتغير المستقل X_1 في النموذج

مصدر التباين	مجموع مربعات	درجات	متوسط مربعات	اختبار F
	الخطأ	الحرية	الخطأ	
الانحراف الموضح من قبل X2	10.63117284	1	·	
الانحراف الموضح من قبل X ₁	1190.991686	1	1190.991686	$F_1 = \frac{1190.991686}{12.06285679}$
الانحراف الموضح من قبل X ₂ و X ₁	1201.622859	2		= 98.73214171
الانحرافات غير الموضحة	72.37714076	6	12.06285679	
الانحرافات الكلية	1274	8		

وبمقارنة قيمة (F_1) المحتسبة والبالغة (98.73) مع مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5.14) ودرجة حرية (2، 6) للبسط والمقام والبالغة (5.14) والتي يتضح أنها الكبر من الجدولية، عليه ترفض فرضية العدم وتقبل الفرضية البديلة، مما يدل على وجود تأثير معنوي للمتغير المستقل X_1 الذي يمثل الدخل القومي على المتغير التابع X_1 الذي يمثل الاستير ادات.

ثانياً: تأثير عنصر السعر X₂ في الاستيرادات Y:

لبيان أثر المتغير المستقل X_2 في الدالة نفترض نموذجاً يتضمن المتغير المستقل X_1 , أي:

$$Y_{i} = B_{0} + B_{1}X_{1} + U_{i}$$

$$\hat{Y} = \hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}X_{1}$$

$$\hat{B}_{1} = \frac{\sum x_{1}y}{\sum x_{1}^{2}} = \frac{881}{650} = 1.355384615$$

أما مجموع مربعات الانحرافات الناجمة عن المتغير X1 فهي:

$$\hat{B}_1 \sum x_1 y = (1.355384615)(881)$$
$$= 1194.093846$$

أما التأثير الذي يضيفه المتغير المستقل X2 الى الدالة فهو:

$$\hat{B}_2 \sum x_2 y = \hat{B}' x' y - \hat{B}_1 \sum x_1 y$$

$$= 1201.622859 - 1194.093846$$

$$= 7.529013$$

و لاختبار مدى معنوية هذا التأثير المضاف من قبل المتغير المستقل X_2 ننظم جدول تحليل التباين الآتى:

تحليل التأثير المستقل للمتغير المستقل X_2 في النموذج

مصدر التباين	مجموع مربعات	درجات	متوسط	اختبار F
	الخطأ	الحرية	مربعات الخطأ	
الانحراف الموضح من قبل X_1	1194.093846	1		7.520012
الانحراف الموضح من قبل X_2	7.529013	1	7.529013	$F_2 = \frac{7.529013}{12.06285679}$
الانحرافات الموضحة من قبل X_1 و X_2	1201.622859	2	·	= 0.624148419
الانحرافات غير الموضحة	72.37714076	6	12.06285679	
الانحرافات الكلية	1274	8		

وبمقارنة قيمة (F_2) المحتسبة والبالغة (0.62) مع مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية (5.14) ودرجة حرية (2, 6) المبسط والمقام والبالغة (5.14) والتي يتضح بأنها اقل من الجدولية، عليه نقبل فرضية العدم، مما يدل بان المتغير المستقل X_2 لايمارس تأثيراً معنوياً على المتغير التابع X.

وعليه نستنتج بأن المتغير المستقل X_1 الذي يمثل الدخل القومي يمارس تأثيراً معنوياً على المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات. في حين ان المتغير المستقل X_2 السني يمسئل السسعر لايمارس تأثيراً معنوياً على Y ومن ثم يجب استبعاده من النموذج المدروس واعتماد النموذج الذي يعتوي على المتغير X_1 ذو التأثير المعنوي في المتغير Y والذي ندرجه ادناه:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + U_i$$

حيث يتم تقديره وتقييمه على غرار النموذج الوارد في الفصل الخاص بالانحدار الخطى البسيط وكما يلي:

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_1 y}{\sum x_1^2} = \frac{881}{650} = 1.355384615$$

$$\hat{B}_0 = \overline{Y} - \hat{B}_1 \overline{X}$$
= 117 - (1.355384615)(113)
= 117 - 153.1584615
= -36.1584615

$$\hat{Y} = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_i$$

$$\hat{Y} = -36.1584615 + 1.355384615 X_i$$

وتعني بان زيادة المتغير المستقل X والذي يمثل الدخل القومي بمقدار وحدة واحدة X تسبب زيادة في المتغير التابع Y الذي يمثل الاستيرادات بمقدار (1.355) وحدة.

$$R^{2} = \frac{\hat{B}_{1} \sum x_{1} y}{\sum y^{2}} = \frac{(1.355384615)(881)}{1274}$$
$$= \frac{1194.093846}{1274} = 0.937279313 = \%93.72$$

$$F = \frac{R^2/k}{1 - R^2/n - k - 1} = \frac{0.937279313/1}{1 - 0.937279313/9 - 1 - 1}$$

$$=\frac{0.937279313}{0.008960098}=104.6059221$$

و لاختبار معنوية المعلمات \hat{B}_{1} و \hat{B}_{0} نحتاج البيانات الآتية:

Y	Ŷ	e _i	e _i ²
100	99.38	0.62	0.3844
106	104.8015385	1.1984615	1.436309967
107	107.5123077	-0.5123077	0.262459179
120	114.2892308	5.7107692	32.61288486
110	114.2892308	-4.2892308	18.39750086
116	119.7107692	-3.7107692	13.76980806
124	126.4876923	-2.4876923	6.188612979
133	131.9092308	1.0907692	1.18977448
137	134.62	2.38	5.6644
$\Sigma Y = 1053$	$\sum \hat{\mathbf{Y}} = 1053$	$\sum e_i = 0$	79.90615335

$: \hat{\mathbf{B}}_1$ بالنسبة لــ

$$S^{2}e_{i} = \frac{\sum e_{i}^{2}}{n-2} = \frac{79.90615335}{9-2} = 11.41516476$$

$$S_{\hat{B}_{1}}^{2} = \frac{S^{2}e_{i}}{\sum x_{i}^{2}} = \frac{11.41516476}{650} = 0.017561791$$

$$S_{\hat{B}_{1}} = \sqrt{S_{\hat{B}_{1}}^{2}} = \sqrt{0.017561791} = 0.132520911$$

$$t_{\hat{B}_1} = \frac{\hat{B}_1}{S_{\hat{B}_1}} = \frac{1.355384615}{0.132520911} = 10.22770372$$

بالنسبة لـ B₀:

$$S^2e = 11.41516476$$

$$S_{\hat{B}_0}^2 = S^2 e_i \left[\frac{1}{n} + \frac{\overline{X}^2}{\sum x_i^2} \right]$$

$$=11.41516476 \left[\frac{1}{9} + \frac{(113)^2}{650} \right]$$

$$= 11.41516476 \begin{bmatrix} 0.1111111111 + 19.64461538 \end{bmatrix}$$

$$=225.5148729$$

$$S_{\hat{B}_0} = \sqrt{S_{\hat{B}_0}^2} = \sqrt{225.5148729} = 15.01715262$$

$$t_{\hat{B}_0} = \frac{\hat{B}_0}{S_{\hat{B}_0}} = \frac{-36.1584615}{15.01715262} = -2.407810749$$

وعليه فان الصيغة التقديرية للنموذج المدروس تكون كما يلي:

$$\therefore \hat{\mathbf{Y}} = \hat{\mathbf{B}}_0 + \hat{\mathbf{B}}_1 \mathbf{X}_i$$

$$\hat{Y} = -36.1584615 + 1.355384615X_{i}$$

$$(2.407) \qquad (10.227)$$

$$R^{2} = \%93.72 \quad F = 104.60$$

8.4 قياس حدود الثقة:

لاحتساب حدود الثقة لأية مشاهدة (نقطة) من مشاهدات خط الانحدار للمجتمع او بعبارة اخرى لحساب القيمة المتوسطة الحقيقية الى Y عند مستوى معنوية معين للمتغير المستقل في النموذج، نفترض بان النقطة المراد تقدير حدود ثقتها هي E(Yo). ولستقدير المجال الذي يمكن ان تقع فيه قيمة E(Yo) المقابلة لتشكيلة معينة من قيم المتغيرات المستقلة E(Yo) يجب اشتقاق متباينة القيمة E(Yo).

$$\hat{\mathbf{Y}}_{0} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{X}_{01} & \mathbf{X}_{02} \dots \mathbf{X}_{0k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{B}}_{0} \\ \hat{\mathbf{B}}_{1} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{B}}_{k} \end{bmatrix}$$

$$\hat{Y}_0 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_{01} + ... + \hat{B}_k X_{0k}$$

$$\hat{\mathbf{Y}}_0 = \mathbf{X}_0 \hat{\mathbf{B}}$$

ولمغـرض اشــتقاق المتباينة الخاصة بتقدير فترات حدود الثقة للقيمة (E(Yo يجب الشنقاق وسط وتباين القيمة (Ŷ₀) وكالآتي:

لايجاد الوسط فاننا نأخذ القيمة المتوقعة لـ (\hat{Y}_0) :

$$E(\hat{Y}_0) = E(X_0\hat{B})$$

$$E(\hat{Y}_0) = X_0E(\hat{B})$$

$$\therefore E(\hat{B}) = B$$

$$\therefore E(\hat{Y}_0) = X_0B$$

و لإيجاد التباين:

$$var(\hat{Y}_{0}) = E\{(\hat{Y}_{0} - E(\hat{Y}_{0})(\hat{Y}_{0} - E(\hat{Y}_{0})')\}$$

$$= E\{(\hat{Y}_{0} - X_{0}B)(\hat{Y}_{0} - X_{0}B)'\}$$

$$\therefore \hat{Y}_{0} = X_{0}\hat{B}$$

وإذا رمــزنا للقيمة التقديرية لتباين قيمة حدود الثقة ${\rm var}(\hat{Y}_0)$ بالرمز ${\rm S}^2(\hat{Y}_0)$ ، فان:

$$S^{2}(\hat{Y}_{0}) = S^{2}X_{0}(X'X)^{-1}X'_{0}$$

وعليه فان حدود الثقة للقيمة (E(Yo) تكون:

$$\begin{split} & E(Y_0) = \hat{Y}_0 \mp t_{\alpha/2}.S(\hat{Y}_0) \\ & E(Y_0) = X_0 \hat{B} \mp t_{\alpha/2}.S(\hat{Y}_0) \end{split}$$

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.4: لدراسة دالة الأنفاق على المواد الغذائية أخذت 6 أسر واعتمد لوغاريتم الأنفاق على المواد الغذائية كمتغير معتمد (Y_i) وعلاقته بلوغاريتم سعر المسواد الغذائية (X_i) ولوغاريتم الدخل المتاح (X_2) كمتغيرات مستقلة، حيث كانت العمليات الحسابية كالآتى:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.86 & -0.15 & -0.07 \\ & 0.32 & -0.45 \\ & & 0.55 \end{bmatrix}$$

$$X'Y = \begin{bmatrix} 9 \\ 12 \\ 16 \end{bmatrix}$$

 X_{2i} قدر معلمات العلاقة بين (Y_i) والمتغيرين العلاقة بين

السؤال 2.4: ماذا تعني النتائج في المعادلة الآتية:

 $lnY_t = 1.24 + 0.25 ln L_t + 0.78 ln K_t$

حيث ان:

Y: تمثل الإنتاج.

L: تمثل العمل.

:Kt تمثل رأس المال.

السوال 3.4: أفرض ان باحثاً قدر العلاقة بين المتغير المعتمد (Y_t) والمتغيرات المستقلة (X_{2t}) و (X_{2t}) و حصل على النتيجة الآنية:

$$\boldsymbol{\hat{Y}}_t = -49.329 + 1.364\,\boldsymbol{X}_{1t} + 0.114\,\boldsymbol{X}_{2t}$$

وتوفرت المعلومات الآتية:

$$\sum_{t=1}^{n} (Y_t - \overline{Y})^2 = 1260.89$$
 , $R^2 = 0.94$, $n = 9$

حيث ان Y_t تمثل الرقم القياسي للاستير ادات، X_{1t} تمثل الرقم القياسي للإنتاج الإجمالي، X_{2t} تمثل نسبة الرقمين القياسيين أعلاه.

المطلوب: ضع جدول تحليل التباين مستعيناً بمعامل التحديد \mathbb{R}^2 وأختبر الأثر الإجمالي للعلاقة المقدرة مستخدماً F(6,2,0.05)=5.14.

السوال 4.4: لتقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد للعلاقة بين الكمية المطلوبة من سلعة معينة (Y) وسعر السلعة (X_1) والدخل الفردي (X_2) .

$$Y = b_0 + b_1 X_1 + b_2 X_2 + U$$

وحصلت على الحسابات الآتية:

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.5 & -1.2 & 1.8 \\ & 1 & -1.7 \\ & & 2 \end{bmatrix}$$
 , $X'Y = \begin{bmatrix} 42 \\ 30 \\ 10 \end{bmatrix}$, $S_u^2 = 10$

المطلوب:

أ- قدر معالم هذه الدالة (b_0,b_1,b_2) مع التفسير الاقتصادي.

ب- احسب مصفوفة التباين والتباين المشترك لمعلمات الدالة . Var - Cov(B)

ج-- أوجد تباين المعلمة b2.

السؤال 5.4: لنموذج الانحدار المتعدد الآتى:

Y = XB + U

 $U \sim N(0, \sigma^2 \ln)$, $E(U_i \ U_j) = 0 \ i \neq j$ المقدر بأسلوب (OLS) غير متحيز، أي ان (b) المقدر بأسلوب $E(\hat{\mathbf{B}}) = B$

السوال 6.4: باحث اقتصادي اعتمد الأنفاق على المواد الغذائية (Y_i) كمتغير معتمد وعلاقته بسعر المواد الغذائية (X_{i1}) والدخل المتاح (X_{i2}) كمتغيرات مستقلة لتقدير دالة الاستهلاك الآتية:

$$\hat{Y}_i = 4.82 - 4.71 X_{i1} + 2.77 X_{i2}$$

مع العمليات الحسابية الآتية:

السؤال 7.4: إذا كان نموذج الانحدار العام هو:

$$Y = XB + U$$

 $U \sim N(0, \sigma^2 \ln)$, $E(U_i \ U_j) = 0$ $i \neq j$ المطلوب: اشتق صيغة لتقدير مصفوفة التباين والتباين المشترك لموجه Var-Cov(b)

(Y) السوال 8.4: في عينة تمثل (24) مشاهدة للكميات المطلوبة من سلعة ما (X_1) وسعرها (X_1) ودخول المستهلكين (X_2) تم تقدير النموذج الآتي: $\hat{Y} = 13 - 7X_1 + 2.4X_2$

المطلوب: اختبر معنوية العلاقة المقدرة من خلال جدول تحليل التباين.

استفد من المعطيات الإحصائية الآتية:

$$\sum x_1 y = 10$$
 $\sum x_2 y = 45$ $\sum y^2 = 40$ $F_{5\%} = 4.42$

السوال 9.4: النتائج الآتية تم الحصول عليها من عينة تمثل (13) عائلة حيث (Y) يمثل الأنفاق الأسبوعي على الشؤون المنزلية، (X_1) يمثل الدخل العائلي و (X_2) يمثل عدد الأطفال في الأسرة.

 $\hat{Y} = 6.26 + 0.45 \, X_1 - 0.38 \, X_2$

$$\sum x_1 y = 38$$
 $\sum x_2 y = -28$ $\sum x_1^2 = 74$ $\sum x_2^2 = 60$ $\sum x_1 x_2 = -12$ $\sum e_i^2 = 12.27$ $t_{5\%} = 2.179$

المطلوب:

أ- ما مقدار ما يفسره المتغيران X_1 و X_2 من التغير الحاصل في Y.

 \hat{b}_1 اختبر معنوية المعلمة

جــ - قدر حدود ثقة %95 للمعلمة b₁.

 $X_2 = 4$ ، $X_1 = 300$ يكون الأنفاق على الشؤون المنزلية عندما يكون $\hat{b}_2 = 4$. $\hat{b}_2 = 4$. $\hat{b}_3 = 4$.

السوال 10.4: النتائج الآتية تم الحصول عليها من عينة تمثل (15) مريضاً حيث (Y) تمثل مدة الرقود في أحد مستشفيات الأمراض المزمنة، (X_1) تمثل عدد المراجعات السابقة و (X_2) يمثل العمر.

$$\hat{Y} = 2.08 + 0.05X_1 + 1.76X_2$$

$$\sum x_1 y = 215$$
 $\sum x_2 y = 9$ $\sum x_1 = 815$
 $\sum x_2 = 26$ $\sum y = 66$ $R^2 = 0.83$
 $S_{\hat{b}_1}^2 = 0.00024$ $S_{\hat{b}_2}^2 = 0.093$ $t_{5\%} = 2.36$

 $F_{5\%} = 6.54$

أ- أختبر معنوية العلاقة بين Y و X_1

ب- أختبر معنوية المعلمات المقدرة.

جــ قدر فترة ثقة %95 للمعلمة .b.

د- قـــدر مدة الرقود لمريض راجع المستشفى (5) مرات سابقة وله من العمر
 (42) عاماً.

الفصل الخامس: مشكلة الارتباط الذاتي

The Autocorrelation Problem

- 1.5 المقدمة.
- 2.5 مسببات الارتباط الذاتي.
 - 3.5 تحليل الارتباط الذاتي.
- 4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتي.
- 1.4.5 طريقة اختبار إحصاءه D-W
- 2.4.5 طريقة THEIL-NAGAR
- 3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT
 - 4.4.5 طريقة DURBIN عام
- 5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتي.
 - 6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتي.
 - 7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتي.
 - 1.7.5 طريقة التحويل.
 - 2.7.5 طريقة التكرار.
 - 3.7.5 طريقة الفرق العام.
 - 4.7.5 طريقة الفرق الأول.
 - 8.5 الأسئلة والتمارين.

الفصل الخامس: مشكلة الارتباط الذاتيي The Autocorrelation Problem

1.5 المقدم_____ة:

مــن جملة الافتراضات (Assumption) الأساسية التي يقوم عليها النموذج الخطي، افتراض انعدام الارتباط بين قيم المتغير العشوائي U في السنة (t) وقيمته في الخطي، افتراض انعدام الارتباط بين قيم المتغير العشوائي U في السنة (t) وقيمته في الخطي السنوات السابقة (t) (t)

$$Cov(U_t, U_{t-s}) = 0$$
 , $(t = 1, 2, ..., n)$

وتعني في الوقت نفسه أيضاً عدم تأثير الظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t) على عكس على تلك التي ستتحقق في السنة (t+1)، غير ان الواقع الاقتصادي يشير الى عكس ذلك، إذ يوجد تأثير للظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t) على تلك التي ستتحقق في السنة (t+1)، (t+2)، (t+2)، ... الخ. كما تتأثير بالظاهرة الاقتصادية المتحققة في السنة (t-1)، (t-2)، (t-1)، (t-2)، ... السخ، فالسنماذج التي تستخدم إحصائيات السلاسل الزمنية وترة والتسي غالباً ما تعاني من ظاهرة الارتباط الذاتي) يكون حد الخطأ في فترة زمنية معينة (t) على علاقة مع حدود الخطأ في فترات زمنية أخرى، مثال ذلك العلاقة بين الدخل القومي ومجمل الأنفاق الاستهلاكي، فزيادة الأنفاق الاستهلاكي في سنة معينة قد يكون مترتباً على الدخل المتولد في السنة السابقة (أو السنتين السابقتين)، وفي حالة اعتماد الأخطاء العشوائية على بعضها البعض ينتفي الافتراض الخاص

بانعدام الارتباط فتظهر مشكلة تدعى مشكلة الارتباط الذاتي The Autocorrelation بانعدام الارتباط فتظهر مشكلة تدعى مشكلة الارتباط الذاتي problem

 $Cov(U_t, U_{t-s}) \neq 0$

2.5 مسببات الارتباط الذاتي:

يظهر الارتباط الذاتي للأسباب التي يمكن ان نوردها بما يلي:

- 1 الآثار الممتدة لبياتات السلامىل الزمنية: ان بعض العوامل العشوائية الطارئة وغير المعتدرة قد ينتج عنها ترابط في قيم العنصر العشوائي، U_i ، لأكثر من فترة زمنية واحدة. فالحروب والفيضانات والزلازل تمتد بآثارها وانعكاساتها على فعالية الاقتصاد لعدة سنوات متتالية، مما يتسبب في حصول ارتباط ذاتي بين قيم فعالية الاقتصاد لعدة سنوات متتالية تتأثر بالقيم الأخرى للفترات السابقة.
- 2 حذف بعض المتغيرات المستقلة من العلاقة المدروسة لسبب أو لآخر: مثل عدم توفر البيانات المناسبة عنها أو لغرض تبسيط هيكل النموذج، وقد يكون من بين هذه المتغيرات المحذوفة متغير أو اكثر مترابطة ذاتياً، الأمر الذي يؤدي الى جعل العنصر العشوائي يتضمن تلك المتغيرات المرتبطة، ومن ثم فان U_t لا يعكس الخطأ العشوائي في النموذج فحسب، إنما يعكس أيضاً المتغيرات المحذوفة.
- 3- معالجـة البـياتات: تجرى على البيانات المنشورة أحياناً عمليات تشذيب وقد يتم تقديـر قيم بعض المشاهدات اعتماداً على قيم مشاهدات أخرى، ذلك ان عمليات التشذيب والتقدير تعتمد في العادة على أخذ معدلات قيم المشاهدات المتتالية، مما يخلق علاقة ما بين أخطاء تلك المشاهدات وبالتالي التأثير على طبيعة توزيعها.
- 4- الصياغة غير الدقيقة للنموذج: بمعنى ان شكل العلاقة الدالية المستخدمة
 لاينطابق مع الشكل الحقيقي، فإذا افترضنا علاقة خطية بين المتغيرين Y و X،

في حين ان العلاقة الحقيقية غير خطية فانه يمكن ان ينتج عن ذلك ترابط ذاتي في عنصر الخطأ.

3.5 تحليل الارتباط الذاتي:

لتوضيح المشكلة يمكننا أخذ النموذج الخطي البسيط الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 X_t + U_t$$
 ...(1.5)

حيث:

$$E(U_{t}) = 0$$

 $var(U_{t}) = E(U_{t}^{2}) = \sigma^{2}U$

ولكنه لا يستوفي فرض انعدام الترابط بل يتبع نمط ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى،

أي انه:

$$U_{t} = f(U_{t-1}) + e_{t}$$

$$U_{t} = \rho(U_{t-1}) + e_{t}$$
...(2.5)

حيث:

ρ أو (rho): معامل الارتباط الذاتي البسيط بين الأخطاء العشوائية وتنحصر قيمته بين (1، 1-)، أي أن $\rho \leq 1$.

وتباین $E(e_t)=0$ متغییر عشوائی یتوزع توزیعاً طبیعیاً بوسط مقداره صفو ، $E(e_t)=0$ ، وتباین e_t مستقل عن $var(e_t)=E(e_t^2)=\sigma^2e$ مستقل عن ثابت مقداره σ^2e مستقل عن e_t مستقل عن

المعادلة (2.5) تستكون من جزئين، الأول مترتب على خطأ الفترة السابقة، والثاني يسنطوي على مجموعة التأثيرات المختلفة العاملة الى جانب المتغيرات المستقلة غير المرتبطة بالفترات الماضية.

من المعادلة (2.5) يمكن الحصول على:

$$U_{t-1} = \rho U_{t-2} + e_{t-1}$$

بتعويض عن كل U_{t-1} بما يساويها في معادلة (2.5) نحصل:

$$U_{t} = \rho(\rho U_{t-2} + e_{t-1}) + e_{t}$$

$$U_{t} = \rho^{2} U_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_{t} \qquad ...(3.5)$$

وفي حالة Ut-2:

$$U_{t-2} = \rho U_{t-3} + e_{t-2}$$

بتعويض عن U_{t-2} بما يساويها في معادلة (3.5) نحصل:

$$U_t = \rho^2 (\rho U_{t-3} + e_{t-2}) + \rho e_{t-1} + e_t$$

$$U_{t} = \rho^{3} U_{t-3} + \rho^{2} e_{t-2} + \rho e_{t-1} + e_{t} \qquad ...(4.5)$$

وبالتعويض المتتالي للأخطاء لعدد من الفترات r (حيث r كبيرة) ، نحصل على:

$$U_t = e_t + \rho e_{t-1} + \rho^2 e_{t-2} + \rho^3 e_{t-3} + \dots + \rho^r e_{t-r}$$
 ...(5.5)

وهذا يعني ان أس p يرداد إلى ما لانهاية وان مقدار e تتناقص بنفس الأس أي يتعبير آخر:

$$U_t = \sum_{r=0}^{\infty} \rho^r e_{t-r}$$

وبأخذ التباين للصيغة (5.5):

$$var(U_t) = E(U_t^2)$$

وبتربيع الطرفين وإدخال التوقع للمعادلة 5.5، نحصل:

$$E(U_t^2) = E(e_t^2) + \rho^2 E(e_{t-1}^2) + \rho^4 E(e_{t-2}^2) + \rho^6 E(e_{t-3}^2) + ... + \rho^r E(e_{t-r}^2)$$

$$: E(e_t^2) = \sigma^2 e$$
 , $E(U_t^2) = \sigma^2 U$

$$\therefore \sigma^2 U = \sigma^2 e + \rho^2 \sigma^2 e + \rho^4 \sigma^2 e + \dots + \rho^r \sigma^2 e$$

وبالترتيب نحصل:

$$\sigma^{2}U = \sigma^{2}e(1 + \rho^{2} + \rho^{4} + ... + \rho^{r})$$

$$\sigma^{2}U = \frac{\sigma^{2}e}{1 - \rho^{2}} \qquad ...(6.5)$$

أما التباين المشترك بين الأخطاء العشوائية فيمكن الوصول إليها كالآتي:

$$Cov(U_t \ U_{t-1}) = E(U_t \ U_{t-1})$$
(7.5)

لذلك وباعتماد المعادلة (5.5)، يمكن كتابة ما يلي:

$$U_{t} = e_{t} + \rho e_{t-1} + \rho^{2} e_{t-2} + \rho^{3} e_{t-3} + \dots + \rho^{r} e_{t-r} \qquad \dots (8.5)$$

$$U_{t-1} = e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^2 e_{t-3} + \rho^3 e_{t-4} + ... + \rho^r e_{t-r}$$
 ...(9.5)

وبتعويض المعادلتين 8.5 و 9.5 في الطرف الأيمن من العادلة 7.5، نحصل:

$$E(U_{t} \ U_{t-1}) = E \begin{bmatrix} (e_{t} + \rho e_{t-1} + \rho^{2} e_{t-2} + ... + \rho^{r} e_{t-r}) \\ (e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^{2} e_{t-3} + ... + \rho^{r} e_{t-r}) \end{bmatrix}$$

وبإعادة الترتيب نحصل على:

$$E(U_{t} \ U_{t-1}) = E \begin{bmatrix} e_{t} + \rho(e_{t-1} + \rho e_{t-2} + ... + \rho^{r} e_{t-r}) \\ (e_{t-1} + \rho e_{t-2} + \rho^{2} e_{t-3} + ... + \rho^{r} e_{t-r}) \end{bmatrix}$$

$$: E(e_t) = 0 , E(e_t^2) = \sigma^2 e$$

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \rho E(e_{t-1} + \rho e_{t-2} + ... + \rho^r e_{t-r})^2$$

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \rho \left[E(e_{t-1}^2) + \rho^2 E(e_{t-2}^2) + ... + \rho^r(e_{t-r}^2) \right]$$

$$E(U, U_{t-1}) = \rho(\sigma^2 e + \rho^2 \sigma^2 e + ... + \rho^r \sigma^2 e)$$

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \rho \sigma^2 e(1 + \rho^2 + ... + \rho^r)$$

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \frac{\rho \sigma^2 e}{1 - \rho^2} \qquad ...(10.5)$$

وبإجراء مقارنة بين التباين صيغة (6.5) والتباين المشترك صيغة (10.5)، نرى:

$$\sigma^{2}U = \frac{\sigma^{2}e}{1-\rho^{2}}$$
, $E(U_{t} U_{t-1}) = \frac{\rho \sigma^{2}e}{1-\rho^{2}}$

وبذلك نجد ان المقام متشابه فيهما ومن ثم فان:

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \rho \sigma^2 U$$
 ...(11.5)

وفي حالة S من الارتباط المتسلسل، Serial Correlation، للأخطاء فان الصيغة (11.5) تكون:

$$E(U_t \ U_{t-1}) = \rho^S \sigma^2 U \neq 0$$
 $(S = 0,1, 2, ..., n-1)$

ويترتب على هذا ان الفرض الخاص بانعدام الارتباط الذاتي بين أخطاء المشاهدات المختلفة في العينة موضوع البحث قد تم تجاوزه، فالتباين المشترك لا يساوي الصفر بل يساوي قيمة هي $ho^s\sigma^2U$ ، نسبة لأن:

$$\rho^{S} \geq 0$$
 , $\sigma^{2}U > 0$

4.5 تقدير معامل الارتباط الذاتى،

:Estimate of Autocorrelation Coefficient

هناك عدة طرق لتقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (ρ) نذكر منها ما يلي:

1.4.5 طريقة اختبار إحصائية D-W:

ويستم تقديسسر معامل الارتباط الذاتي من خلال طريقة اختيار المعامل (م) كما يلي:

باستحضار معادلة تقدير D-W:

$$D^* = 2(1 - \hat{\rho})$$

نستطيع تقدير معامل الارتباط الذاتي (ρ) في الصيغة الآتية بعد إعادة ترتيب المعادلة أعلاه، نحصل على:

$$\hat{\rho} = \frac{(2 - D^*)}{2}$$

$$\hat{\rho} = \left[\frac{2}{2} - (\frac{1}{2})D^* \right]$$

or

$$\hat{\rho} = \left[1 - (0.5D^*)\right]$$

2.4.5 طريقة 2.4.5

يتم تقدير معامل الارتباط الذاتي (ρ) من خلال الصيغة الآتية:

$$\hat{\rho} = \frac{n^2 \left[1 - \frac{D^*}{2} \right] + (k+1)^2}{n^2 - (k+1)^2}$$

حيث ان:

k : تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

K+1: تمثل عدد معلمات الانحدار المقدرة.

3.4.5 طريقة COHRANE-ORCUTT

يـــتم تقديــر معامل الارتباط الذاتي من خلال تقدير قيم المتغير العشوائي وفق الصبغة الآتية:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum \hat{U}_i \hat{U}_{i-1}}{\sum (\hat{U}_i)^2}$$

او باستخدام طريقة انحدار قيمة المتغير العشوائي $\hat{\mathbf{U}}_{i-1}$ على $\hat{\mathbf{U}}_{i-1}$ وكما يلى:

$$U_{i} = \hat{\rho} \hat{U}_{i-1}$$

4.4.5 طریقــة 4.4.5

وهي طريقة ذات مرحلتين في معالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (ρ) والتي يتم فيها إعادة تقدير انحدار المتغير التابع على قيمته المرتدة زمنياً لفترة زمنية سابقة واحدة، على قيم المتغيرات التوضيحية (المفسرة) للنموذج، وقيم المتغيرات التوضيحية للتخلف الزمني لفترة زمنية واحدة سابقة لها.

تعد هذه الطريقة نموذجاً للمربعات الصغرى الشاملة (GLS)، وعلى وفق هذه الطريقة يتم التقدير على مرحلتين تنصب المرحلة الأولى على تقدير معامل الارتباط الذاتى (ô) وكالآتى:

$$(Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) = B_0(1-\hat{\rho}) + B_1(X_t - \hat{\rho}X_{t-1}) + U_t$$

$$Y_{t} = B_{0}(1-\hat{\rho}) + \hat{\rho}Y_{t-1} + B_{1}X_{t} - B_{1}\hat{\rho}X_{t-1} + U_{t}$$

$$Y_{t} = B_{0} + \hat{\rho}Y_{t-1} + B_{1}X_{t} - \gamma X_{t-1} + U_{t}$$

حيث أن:

$$B_0 = B_0(1-\hat{\rho}) , \gamma = B_1\hat{\rho}$$

يتبين من المعادلة أعلاه، بأنه نموذج يضم ثلاث متغيرات مستقلة هي: X_t , Y_{t-1} , Y_{t-1} والميل للمتغير Y_{t-1} يعطينا تقدير لمعامل الارتباط الذاتي X_{t-1})، وانه قابل للتقدير بطريقة (OLS).

أما المرحلة الثانية فهي تقدير النموذج الآتي:

$$(Y_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) = \overset{*}{B}_0 + B_1(X_t - \hat{\rho}Y_{t-1}) + U_t$$
 دیث ان:

 $B_0 = B_0(1 - \hat{\rho})$

5.5 النتائج المترتبة على وجود الارتباط الذاتى:

تبقى مقدرات المربعات الصغرى العادية (OLS) تتسم بالخطية وعدم التحيز، الا إنها تفقد خاصية افضل أو اصغر تباين (التباين بوجود الارتباط الذاتي يفوق التباين فسي غياب الارتباط الذاتي)، كما ويؤثر الارتباط الذاتي على نتائج تحليل الانحدار فتعطي الاختبارات r ، t نتائج أقل دقة من تلك في حالة عدم وجوده، حيث تستند تلك الاختبارات على التباين والخطيا المعياري وعدم دقة التنبؤات المستحصلة بالاختبارات على التباين والخطيا المعياري وعدم دقة التنبؤات المستحصلة بالاختبارات على التباين والخطيا المعياري وعدم دقة التنبؤات المستحصلة بالاختبارات على التباين والخطيا المعياري وعدم دقة التنبؤات المستحصلة بالاختبارات على التباين والخطيان المعياري وعدم دقة التنبؤات المستحصلة بالاختبارات على التباين والخطيان المعياري وعدم دقة المربعات الصغرى الشاملة (OLS) مما يتطلب استخدام طرق أخرى التقدير كطريقة المربعات الصغرى الشاملة غير متحيز في حالة وجود الارتباط الذاتي شريطة ان تكون قيمة (P) معلومة.

6.5 اختبار وجود الارتباط الذاتى:

هـناك عـدد من الاختبارات الخاصة بالارتباط الذاتي، الا ان أكثرها شيوعاً ودقـة هو اختبار داربن-واتسون، Durbin-Watson Test ، الذي يرمز له بالرمز (D-W) أو (d) وذلك لسهولته وإمكانية اعتماده في حالة العينات الصغيرة، ويعتمد هذا الاختيار على بواقى الانحدار المقدر.

ويفترض الاختبار وجود فرضيتين أساسيتين هما:

1- فرضية العدم: التي تنص على انعدام الارتباط الذاتي:

$$H_0: \rho = 0$$

2- الفرضية البديلة: ويعنى وجود ارتباط ذاتي موجب:

$$H_1: \rho \neq 0$$

ويفترض في هذا الاختبار ان الارتباط الذاتي لقيم U يتخذ نمط الانحدار الذاتي من الدرجة الأولى:

$$U_t = \rho U_{t-1} + e_t$$

ويتم احتساب الأخطاء العشوائية للنموذج أعلاه كالآتى:

$$\mathbf{e}_{t} = \mathbf{Y}_{t} - \mathbf{\hat{Y}}_{t}$$

وبالتالى تحسب قيمة D.W بموجب الصيغة الآتية:

D.W =
$$\frac{\sum_{t=2}^{n} (e_{t} - e_{t-1})^{2}}{\sum_{t=1}^{n} e_{t}^{2}}$$

ان قسيمة D.W الاختبارية مجدولة بقيمتين، تشير أحدهما إلى الحد الأدنى، D.W السبب السبب الله المستوى المعنوب للمستوى المعنوب المعنوب المعنوب المعنوب المعنوب معنوبة معين، المعنوب المعن

n: تمثل عدد المشاهدات في العينة موضوع الدراسة.

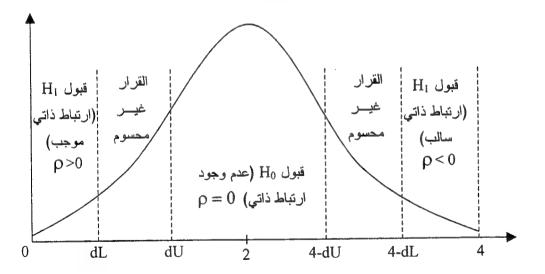
k': تمثل العدد الكلى للمتغيرات المستقلة.

ويستم الاختسبار علسى أساس مقارنة قيمة (D.W) المحتسبة بقيم dU و Ub المجدولة لاتخاذ القرار الإحصائي المطلوب وعلى الشكل الآتى:

- ات مشكلة ارتباط داتي H_1 ونقبل H_1 أي ان هناك مشكلة ارتباط داتي -1 موجب.
- -2 عـندما dL < D.W < dU يكـون الاختيار غير محسـوم وتترك الحرية للباحث بقبول او رفض فرضية العدم، إذ قد يكون السبب في وجود المشكلة خطأ في صيغة النموذج وليس بسبب ارتباط الأخطاء.
 - نقبل H_0 نقبل dU < D.W < 4 انعدام وجود مشكلة الارتباط الذاتي. -3
- H_1 ونقبل H_1 بمعنى ان هناك مشكلة ارتباط H_0 ونقبل . H_1 بمعنى ان هناك مشكلة ارتباط ذاتى سالب.

ويمكن توضيح الاحتمالات الواردة أعلاه في الشكل الآتي:

شكل رقم 1.5: التوزيع الاحتمالي لـ D.W (اختبار D.W)



ويمكن تلخيص مدى اختبار D.W في الجدول الآتي:

	The second secon	Proposition of the control of the co
رفيض فرضية العدم، أي وجود ارتباط ذاتي	$4-dL < D^* < 4$	1
ho < 0 سالب، أي ان	, ab	_
نتيجة غير مؤكدة (او محددة).	4-dU < D' < 4-dL	2
قبول فرضية العدم، أي عدم وجود ارتباط	$2 < D^* < 4-dU$	3
ho=0 ذاتي، أي ان	2 \ D \ \ 4-dO	<i>J</i>
قبول فرضية العدم، أي عدم وجود ارتباط	$dU < D^* < 2$	4
ho=0 ذاتي، أي ان	u0 \ D \ 2	
نتيجة غير مؤكدة.	$dL < D^* < dU$	5
رفيض فرضية العدم، أي وجود ارتباط ذاتي	$0 < D^* < dL$	6
ho>0 موجب، أي ان	U \ D \ dL	0

بعد أن عرفنا طبيعة هذا الافتراض وأسباب مخالفتها والآثار التي تترتب على المخالفة واختبار وجودها ننتقل الآن إلى تبيان طرق التغلب على هذه المشكلة.

7.5 معالجة مشكلة الارتباط الذاتى:

Remedy of First-Order Autocorrelation Problem

تتوقف الطريقة التي تعالج فيها مشكلة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى على سبب حدوث المشكلة.

1- عندما يكون السبب هو إهمال متغير أو متغيرات مستقلة من النموذج يتعين إضافة ذلك المتغير أو المتغيرات إلى النموذج.

- 2- عندما يكون سبب المشكلة هو الصياغة غير الدقيقة فان المعالجة تتوقف على إعادة صياغة النموذج المراد دراسته من واقع العلاقة.
 - 3- أما إذا كان سبب المشكلة هو وجود علاقة فعلية بين قيم حد الخطأ أو المتغير العشوائي فيصبح معالجتها بتحويل المتغيرات المستقلة بالشكل الذي يضمن التخلص من الارتباط الذاتي.

فإذا كان الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى يتعين تحويل المتغيرات المستقلة في النموذج المراد در استه بإحدى الطرق الآتية:

- طريقة التحويل.
- طريقة التكرار.
- طريقة الفرق العام.
- طريقة الفرق الأول.

وسنحاول بيان الكيفية التي نتم بها معالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى باستخدام الطرق أعلاه. وبافتراض ان نموذج الانحدار المراد تقديره هو:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

1.7.5 طريقة التحويل، Transformation Method

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرق استخداماً في معالجة مشكلة الارتباط الذاتي مسن الدرجة الأولى، وتسمى بطريقة كوكران – اوكارت، ويمكن توضيحها باتباع الخطوات الآتية:

أ- بافتراض ان المتغير العشوائي، U_i ، في المعادلة اعلاه، يخضع للارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، أي ان:

$$\boldsymbol{U}_{_{i}}=\rho\boldsymbol{U}_{_{i-1}}+\boldsymbol{e}_{_{i}}\qquad \quad ,\mid\rho\mid\leq 1$$

وان المتغير العشوائي، ei، يتبع افتراضات OLS للقيمة المتوقعة صفر وثبات التباين وبدون ارتباط ذاتى، أي ان:

$$E(e_i^{})=0$$
 , $E(e_i^{}e_j^{})=0$, $E(e_i^{})^2=\sigma^2$:

 :اي ان:

ولغرض التخلص من الارتباط الذاتي، يمكن تحويل البيانات في المعادلة اعلاه، وذلك باستخدام التخلف الزمني للمتغير التابع والمتغير المستقل مع المتغير العشوائي ويكتب النموذج كما يلى:

$$Y_{i-1} = B_0 + B_1 X_{i-1} + U_{i-1}$$
 ...(12.5)

وبضرب المعادلة (12.5) بمعامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (ρ) نحصل على:

$$\rho Y_{i-1} = \rho B_0 + \rho B_1 X_{i-1} + \rho U_{i-1} \qquad \dots (13.5)$$

وبطرح المعادلة (13.5) من المعادلة (12.5) نحصل على:

$$Y_i - \rho Y_{i-1} = B_0(1-\rho) + B_1(X_i - \rho X_{i-1}) + (U_i - \rho U_{i-1})$$
203

ومن هذه المعادلة يلاحظ ان الحد الأخير يمثل:

$$U_{i} - \rho U_{i-1} = e_{i}$$

أي ان:

$$U_i = \rho U_{i-1} + e_i$$

ويلاحظ من هذه الطريقة بأنها غير عملية، بسبب ان قيمة ρ مجهولة، لذا فقد اقترح داربن الطريقة الثانية، الطريقة التكرارية Iterative Method.

2.7.5 طريقة التكرار، Iterative Method:

على وفق هذه الطريقة:

1- نبدأ باستخدام طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية (OLS) لتقدير معلمات السنموذج ولغرض الإيضاح نفترض نموذجاً يتضمن متغير مستقل واحد وكالآتي:

$$Y_t=B_0+B_1X_t+U_t$$
حيث نحصل على \hat{B}_0 و بانباع OLS وكالآتي:
$$\hat{Y}_*=\hat{B}_0+\hat{B}_1X_t$$

ثم يتم حساب بواقي المربعات الصغرى (e_t) من خلال المعادلتين أعلاه، حيث:

$$\mathbf{e}_{t} = \mathbf{Y}_{t} - \hat{\mathbf{Y}}_{t}$$

2- نحسب قيمة معامل الارتباط الذاتي التقديري ($\hat{\rho}$) ووفق القانون الآتي:

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t} e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^{2}}$$
 (i = 1,2,3,...,n)

 X_t والمستقل Y_t والمستقل Y_t والمستقل X_t وكالآتي: X_t وكالآتي:

$$\begin{aligned} Y_t &= Y_t - \hat{\rho} Y_{t-1} \\ \overset{*}{X}_t &= X_t - \hat{\rho} X_{t-1} \end{aligned}$$

ويستم تقدير معالم النموذج من جديد في ضوء البيانات المحولة للمتغيرين المذكورين باعستماد OLS أي أجسراء انحدار المتغير التابع المحول \mathring{Y}_t على المتغير المستقل المحول \mathring{X}_t فنحصل على:

$$\hat{\hat{Y}}_{t} = \hat{\hat{B}}_{0} + \hat{\hat{B}}_{1} \hat{X}_{t}$$

* ومن ثم نحسب البواقي الجديدة e ، وكالآتي:

$$\mathbf{e}_{t}^{*} = \mathbf{\hat{Y}}_{t} - \mathbf{\hat{Y}}_{t}^{*}$$

وبالتالي نحسب قيمة D.W مرة أخرى بموجب الصيغة الآتية:

$$D.W = \frac{\sum (e_{t} - e_{t-1})^{2}}{\sum e_{t}}$$

وتقارن مع القيمة الجدولية لقبول أو رفض فرضية العدم، ففي حالة قبول H_1 يعني انعدام الارتباط الذاتي والتوقف عند هذا الحد. أما في حالة قبول H_1 عندها تجرى عملية تنقيبة للبيانات مرة ثانية باتباع الخطوات السابقة نفسها أي تكرار ما قمنا به وبالأسلوب ذاتسه لرؤية مدى تناقص الارتباط الذاتي، ويمكن الاستمرار في عملية التصحيح والتقدير الحي أن تتقارب القيم التقديرية لكل من \hat{B}_1 و \hat{B}_1 للنموذج المدروس بين مرحلة وأخرى.

3.7.5 طريقة الفرق العام، The Generalized Difference Method

وتسمى طريقة المربعات الصغرى الشاملة، GLS، تميزاً عن طريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، ولمعالجة الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى نتبع الخطوات الآتية:

- الطرق ρ ، باستخدام أياً من الطرق الخرجة الأولى، ρ ، باستخدام أياً من الطرق المستخدمة في تقدير ρ التي تم ذكرها سابقاً.
- X_i و المستقلة Y_i و الفروق الأولى للمتغيرات التابعة والمستقلة Y_i و X_i على التوالي وذلك طبقاً لطريقة الفرق العام باستخدام الصيغة الآتية:

$$(Y_i - \rho Y_{i-1}) = B_0(1-\rho) + B_1(X_i - \rho X_{i-1}) + U_i$$
 ...(14.5)

وبتحويل البيانات من خلال استخدام الصيغة الآتية:

$$Y_i = Y_i - \rho Y_{i-1}$$

$$X_i = X_i - \rho X_{i-1}$$

حيث ان:

 Y_i قيمة Y_i المحولة.

 X_i قيمة X_i المحولة.

ولغرض تجنب إهمال المشاهدة الأولى في عملية أيجاد الفروق، سوف يتم تقدير المشاهدة الأولى المحولة لكل من المتغير التابع، Y_i , والمتغير المستقل، X_i , كما يلي:

3- باستخدام طريقة OLS في تقدير معاملات النموذج الجديد بعد التحويل كما في الصيغة الآتية:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

ومسن شم يستم اختبار وجود الارتباط الذاتي من خلال تقدير النموذج اعلاه، وذلك باستخدام اختبار D-W المشار إليه سابقاً. فإذا كانت النتيجة تشير الى وجود الارتباط الذاتسي، فانه يجب تكرار استبدال القيم لكل من \dot{Y}_i و \dot{X}_i بقيم الفروق الأولى لهذين المتغيريسن بسنفس الطريقة المشار إليها سابقاً ومن ثم أجراء الانحدار على البيانات المحولة واعادة الاختبار الى أن نتأكد بإزالة الارتباط الذاتي من النموذج.

4.7.5 طريقة الفرق الأول، Ce Method طريقة الفرق الأول،

لقد بينًا سابقاً أن قيمة ho تتحصر بين المصفر والواحد صحيح، ho <
ho < 0، لذا يمكن البدء من أقصى الطرفين في التقدير.

عـند الطـرف الأول نسـتطيع الافتراض بان $\rho = 0$ ، وهذا يعني لاوجود للارتباط الذاتي. وعند الطرف الثاني نفترض ان $\rho = 1$ ، وهذا يعني ان هناك ارتباط ذاتسي موجـب أو سالب. وكما هو معروف انه عند إجراء الانحدار، فأن واحدة من الافتراضـات العامة، هي عدم وجود ارتباط ذاتي وبالتالي نترك اختبار DW، أو أي اختبارات أخرى.

في المعادلة (15.5)، ويتم حساب الرقم الفردي الأولى للمتغيرات $\rho=1$ على وفق في المعادلة (15.5)، ويتم حساب الرقم الفردي الأولى للمتغيرات X_i على وفق معادلة الفرق الأولى الآتية:

$$Y_{i} - Y_{i-1} = B(X_{i} - X_{i-1}) + (U_{i} - \rho U_{i-1})$$

 $Y_{i} - Y_{i-1} = B(X_{i} - X_{i-1}) + e_{i}$
 $\Delta Y_{i} = B\Delta X_{i} + e_{i}$ (15.5)

حيث أن Δ تُمثل بدالة الفرق الأول، ولنجاح الفروق للقيمتين، بإجراء انحدار المعادلة (15.5) لابد من عمل الفروق الأولى لكل من المتغير التابع والمتغيرات المستقلة واستخدامهم كمدخلات في تحليل الانحدار.

ويجب الملحظة هنا ان الصورة المهمة لنموذج الفرق الأول لا يوجد فيها الحد الثابت، ولغرض أجراء انحدار المعادلة (15.5) فانه سوف يستخدم الانحدار من خلال النموذج الأصلي لكن بافتراض ان النموذج الأصلي هو:

$$Y_{i} = B_{0} + B_{1}X_{i} + B_{2}t + U_{i}$$

وحيث أن t تمثل اتجاه المتغير، وان U_i تحقق الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى، لذا يمكن التحقق من ان تحويل الفرق الأول في المعادلة (15.5) تصبح كما يلي:

$$\Delta Y_i = BX_i + B_2 + e_i \qquad \dots (16.5)$$

حيث ان:

$$\Delta Y_i = Y_i - Y_{i-1}$$
$$\Delta X_i = X_i - X_{i-1}$$

وان المعادلة (16.5) تبين ان هناك الحد الثابت في صيغة الفرق الاول، وذلك بمقارنتها في المعادلة (15.5) لكن بالطبع، B_2 يمثل معامل اتجاه المتغير في النموذج الأصلى، لذلك فانه:

"إذا يوجد الحد الثابت في صيغة الفرق الأول، يدل على أنه كان يوجد حد اتجاه خطي في الحقيقة معامل اتجاه المتغير".

وإذا كانت قيمة B_2 ، على سبيل المثال، موجبه في المعادلة (16.5)، فأن هذا يعني وجود اتجاه متصاعد في Y بعد السماح لأثر كل المتغيرات الآخرى، وبدلاً من افستراض ان $\rho = 1$ ، نفسترض إن $\rho = 1$ هسذا يعني أن هناك ارتباط ذاتي من الدرجة الأولى سالب والذي V يمثل سلسلة زمنية نمطية، Typical، في الاقتصاد.

والآن فان معادلة الفرق العام (14.5) تأخذ الكيفية الآتية:

$$Y_i + Y_{i-1} = 2B_0 + B_1(X_i - X_{i-1}) + e_i$$

e, in the description of the second secon

$$\frac{Y_i + Y_{i-1}}{2} = B_0 + B_1 \frac{X_i - X_{i-1}}{2} + \frac{e_i}{2}$$

فالـنموذج أعـلاه يُعـرف على انه معدل نموذج الانحدار ذات الفترتين وذلك بسبب انحـدار قيمة ما يحرك متوسط أحدهما إلى الآخر. وان تحويل الفرق الأول الذي قدم سابقاً اصبح معروفاً إلى حد ما في الاقتصاد القياسي التطبيقي لأنه من السهل تمثيله، Perform لكـن يمكـن ملاحظـة ان مـثل هذا التحويل يتوقف على افتراض ان $\hat{\rho} = +1$ ، أنـه يكون مرتبط إيجابياً وبشكل تام. إذا لم تكن هذه الحالة، فان معالجته سـوف تكـون أسـوأ مـن المشكلة الأصلية. لكن كيف نستطيع ان نجد ما إذا كان الافتراض $\rho = +1$ يكون قابل للتشخيص في الوضع المعطى؟ والإجابة هي:

 ρ : تتوقف على اختبار إحصائية D لدرابن واطسون، D-W. وباستحضار المعادلة الآتية:

$$D^* = 2(1 - \rho^2)$$

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D^*}{2} \qquad ...(17.5)$$

 D^* الذي تقترح بطريقة مبسطة وسهلة للحصول على تقدير $\hat{\rho}$ من التقدير لإحصائية . و اضح من المعادلة (17.5) بأن قضية الغرق الأول $\hat{\rho}=+1$ تكون سالبة المفعول عندما $D^*=0$ و بشكل تقريبي.

ويكون واضح أيضاً عندما $D^*=2$ و $D^*=6$ ، وعندما $D^*=6$ و $D^*=6$ ويكون واضح أيضاً عندما $D^*=6$ تزودنا بطريقة عمل جاهزة للحصول على تقدير معامل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى (ρ) ، لكن يلاحظ ان العلاقة (17.5) هي فقط مقربة الى واحد.

وربما لا يكون ذلك صحيح للعينات الصغيرة. للعينات الصغيرة ربما يستخدم D^* الختبار آخر هو اختبار D^* المشار إليه سابقاً لتعديل إحصائية

وحالما تم تقدير ô من المعادلة (17.5) بالإمكان تحويل البيانات باستخدام المعادلة الآتية:

$$Y^* = B_0^* + BX_i^* + e_i$$
 ...(18.5)

حيث ان:

$$Y_{i}^{*} = (Y_{i} - \rho Y_{i-1})$$

$$B_{0}^{*} = B_{0}(1 - \rho)$$

$$X_{i}^{*} = (X_{i} - \rho X_{i-1})$$

ومن ثم تُستخدم طريقة المربعات الصغرى العادية OLS، لتقدير معاملات النموذج الجديد المتكون من الفرق الأولى Y_i و X_i في الصيغة أعلاه.

وبذلك يستم اختسبار وجود الارتباط الذاتي في المعادلة (18.5) بعد تقديرها باستخدام اختبار D-W. فإذا اظهر الاختبار وجود الارتباط الذاتي فانه يجب استبدال القسيم الجديدة بالفرق الأول لهذه المتغيرات الجديدة Y_i^* بالطريقة نفسها الموضحة في المعادلة (15.5) ثم أجراء الانحدار على البيانات المحولة واعادة الاختبار الى ان يتم التأكد من عدم وجود الارتباط الذاتي.

ويتضح مما سبق ان طريقة الفرق الأول هي عبارة عن إعادة أجراء الانحدار على على شكل فروق وحذف الحد المطلق (الثابت) ويتم استخدام هذه الطريقة عندما $\hat{\rho}=+1$. وتمثل هذه الطريقة حالة خاصة من طريقة الفرق العام.

العلاقة بين $\hat{\rho}$ و \mathbf{W} - \mathbf{W} :

تسريط بين إحصاءه W-D الاختبارية و $\hat{\rho}$ ، مقدرة معلمة الارتباط الذاتي البسيط بين الأخطاء العشوائية، العلاقة الآتية:

$$D.W \cong 2(1-\hat{\rho})$$

ويمكن الوصول الى العلاقة أعلاه كالآتي:

D.W =
$$\frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

وبفك القوس في البسط نحصل:

D.W =
$$\frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t}^{2} + \sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^{2} - 2\sum_{t=2}^{n} e_{t}e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_{t}^{2}}$$

وعندما تكون حجم العينة كبير جداً $(n o \infty)$ فأننا نحصل على الآتى:

$$\begin{array}{l} \sum\limits_{t=1}^{n}e_{t}^{2}\cong\sum\limits_{t=2}^{n}e_{t}^{2}\cong\sum\limits_{t=2}^{n}e_{t-1}^{2} \end{array}$$

وعليه فإن:

D.W =
$$\frac{2\sum_{t=1}^{n} e_{t}^{2} - 2\sum_{t=2}^{n} e_{t}e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_{t}^{2}}$$

D.W =
$$2\left(1 - \frac{\sum_{t=2}^{n} e_{t}e_{t-1}}{\sum_{t=1}^{n} e_{t}^{2}}\right)$$

D.W = 2
$$\begin{cases} \sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1} \\ 1 - \frac{t=2}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} \end{cases}$$

وبما أن $e_{\rm t}$ عبارة عن القيمة التقديرية للمتغير العشوائي $U_{\rm t}$ فان القيمة

$$\begin{pmatrix} \frac{n}{\sum_{t=2}^{n} e_t e_{t-1}} \\ \frac{n}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} \end{pmatrix}$$

تمثل القيمة التقديرية لمعامل الارتباط الذاتي البسيط بين الأخطاء العشوائية ونرمز له بالرمز ô، أي ان:

$$D.W = 2(1 - \hat{\rho})$$

أو بصيغة أخرى:

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{D.W}{2}$$

وبما أن قيمة $\hat{\rho}$ تتحصر بين (1، 1-) لذا فان قيمة D.W تتر اوح بين (0 و4).

فإذا كانت $\hat{
ho}=0$ ، فأن:

 $\hat{
ho}=1$ عندما $\hat{
ho}=1$ عندما

$$D.W = 2(1-1) = 0$$
 equal $0 = 0$

عندما $\hat{\rho} = -1$ ، فأن:

وجود ارتباط ذاتي سالب:

$$D.W = 2[1-(-1)] = 2 + 2 = 4$$

مثال 1.5: الجدول الآتي يتضمن البيانات الخاصة بعدد حوادث السرقات (Y_t) وعدد مكاتب الشرطة (X_t) في أحد الدول للمدة (1999–1990)، وباستخدام طريقة المربعات الصغرى (OLS) ، تم تقدير العلاقة الآتية:

$$\hat{Y}_i = 1346.28941 - 12.10030471X_i$$
(5.319) (3.105)

 $R^2 = 0.546$, F = 9.641

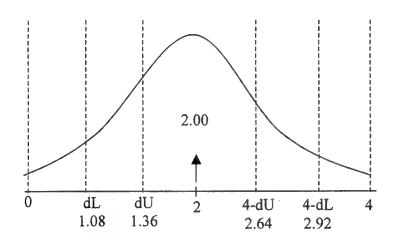
والمطلوب: معرفة ما إذا كان النموذج الخاص بالعلاقة أعلاه يعاني من مشكلة الارتباط الذاتي مستخدماً احصاءة W-D عند مستوى معنوية W-D علمت ان U=1.36 , U=1.08 علمت ان

السنة	عدد حوادث	عدد مكاتب	$\hat{\mathbf{Y}}_{t}$	ث عدد مک	$\mathbf{e}_{_{\mathbf{t}}}$	e_{t-1}
	Y_t السرقات،	الشرطة، Xt		O _t	- t-1	
1990	580	60	620.2711274	-40.2711274	-	
1991	890	59	632.3714321	257.6285679	-40.2711274	
1992	430	77	414.5659473	15.4340527	257.6285679	
1993	690	52	717.0735651	-27.0735651	15.4340527	
1994	310	87	293.5629	16.4371	-27.0735651	
1995	750	50	741.2741745	8.7258255	16.4371	
1996	460	80	378.2650332	81.7349668	8.7258255	
1997	630	52	717.0735651	-87.0735651	81.7349668	
1998	800	53	704.9732604	95.0267396	-87.0735651	
1999	215	67	535.5689944	320.5689944	95.0267396	
n = 10	$\sum Y_i = 5755$	$\sum X_i = 637$	$\sum \hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i}} = 5755$	$\sum e_t = 0$		

$e_t - e_{t-1}$	$\left(\mathbf{e}_{t} - \mathbf{e}_{t-1}\right)^2$	e _t ²
	-	1621.763702
297.8996953	88744.22846	66372.479
-242.1945152	58658.18319	238.2099827
-42.5076178	1806.897571	732.9779272
43.5106651	1893.177977	270.1782564
-7.7112745	59.46375441	76.14003066
73.0091413	5330.334713	6680.604798
-168.8085319	28496.32044	7581.805739
182.1003047	33160.52097	9030.081239
-415.595734	172719.8141	102764.4802
	$\sum (e_t - e_{t-1})^2 =$	$\sum e_t^2 =$
	390868.9412	195368.7208

D.W =
$$\frac{\sum_{t=2}^{n} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

$$D.W = \frac{390868.9412}{195368.7208} = 2.000673087$$



وعليه، فيان النموذج أعلاه لا يعاني من مشكلة الارتباط الذاتي ذلك ان قيمة D.W المحتسبة تقع في منطقة القبول أي قبول فرضية العدم التي تنص بعدم وجود ارتباط ذاتى بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي.

مـــثال 2.5: في المثال الوارد في الفصل الأول حللنا العلاقة بين عدد سنوات الخدمة (X_i) ومعــدل الأجر السنوي (Y_i) لعينة تمثل (X_i) موظفين في أحد الدوائر. حيث تم تقدير المعادلة الآتية:

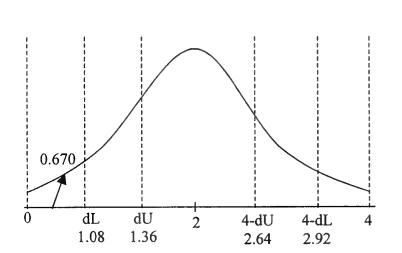
$$\hat{\mathbf{Y}}_{i} = 24.48571429 + 1.486904762\mathbf{X}_{i}$$

وفي الواقع لا يمكن الأخذ بالمعادلة أعلاه بصورة نهائية إلا بعد التأكد من عدم وجود الارتباط الذاتي، ولغرض ذلك نجري الآن اختبار (D.W) على العينة موضوع البحث.

X_t	$\mathbf{Y_t}$	$\hat{\mathbf{Y}}_{t}$	e _t	e_{t-1}
4	25.6	30.43333334	-4.83333334	-
8	32.7	36.38095239	-3.68095239	-4.83333334
12	45.4	42.32857143	3.07142857	-3.68095239
16	53.9	48.27619048	5.62380952	3.07142857
20	59.0	54.22380953	4.77619047	5.62380952
24	62.6	60.17142858	2.42857142	4.77619047
28	65.0	66.11904763	-1.11904763	2.42857142
32	65.8	72.06666667	-6.26666667	-1.11904763
$X_{i} = 144$	$\sum Y_i = 410$	$\sum \hat{\mathbf{Y}}_{i} = 410$	$\sum e_t = 0$	

$e_t - e_{t-1}$	$\left(\mathbf{e}_{t}-\mathbf{e}_{t-1}\right)^{2}$	e_t^2
alau-a		23.36111118
1.15238095	1.327981854	13.5494105
6.75238096	45.59464863	9.433673461
2.55238095	6.514648514	31.62723352
-0.84761905	0.718458053	22.81199541
-2.34761905	5.511315204	5.897959142
-3.54761905	12.58560092	1.252267598
-5.14761904	26.49798178	39.27111115
	$\sum (e_t - e_{t-1})^2 =$	$\sum e_t^2 =$
	98.75063496	147.204762

$$0.W = \frac{\sum_{t=2}^{\infty} (e_t - e_{t-1})^2}{\sum_{t=2}^{\infty} e_t^2} = \frac{98.75063496}{147.204762} = 0.670838589$$



0 < D.W < dL 0 < 0.670 < 1.08

و لاستبعاد أثر الارتباط الذاتي نتبع طريقة التكرار:

$e_t.e_{t-l}$	e_{t-1}^2	Y_{t-1}	$\hat{\rho}Y_{t-1}$	Y _t
-	_	-	_	
17.79126991	23.36111118	25.6	15.77581522	16.92418478
-11.30578234	13.5494105	32.7	20.15113897	25.24886103
17.27312923	9.433673461	45.4	27.9774223	25.9225777
26.86038543	31.62723352	53.9	33.21548595	25.78451405
11.59931967	22.81199541	59.0	36.35832414	26.24167586
-2.717687092	5.897959142	62.6	38.57679815	26.42320185
7.012698485	1.252267598	65.0	40.05578083	25.74421917
$\sum_{t=0}^{\infty} e_{t} \cdot e_{t-1} = 66.51333329$	$\sum_{t=1}^{\infty} e_{t-1}^2 = 107.9336508$			$\sum_{t=1}^{x} Y_{t} = 172.2892344$

$$\hat{\rho} = \frac{\sum_{t=2}^{n} e_t . e_{t-1}}{\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^2} = \frac{66.51333329}{107.9336508} = 0.616242782$$

$$\overset{*}{Y}_t = Y_t - \hat{\rho} Y_{t-l}$$

$$\overset{*}{X}_{t} = X_{t} - \hat{\rho}X_{t-1}$$

X_{t-1}	$\hat{\rho}X_{t-1}$	$\overset{*}{X_{t}}$	$X_t Y_t$	* ² Y _t	
-	-	_	_	-	
4	2.464971128	5.535028872	93.67585139	286.4280305	
8	4.929942256	7.070057744	178.5109055	637.5049833	
12	7.394913384	8.605086616	223.0660264	671.9800346	
16	9.859884512	10.14011549	261.4579503	664.8411648	
20	12.32485564	11.67514436	306.3753539	688.6255519	
24	14.78982677	13.21017323	349.0550737	698.185596	
28	17.2547979	14.7452021	379.6037146	662.7648207	
		$\sum_{t=0}^{x} X_{t}^{t} = 70.98080841$	$\sum_{t=0}^{t} X_{t} Y_{t} = 1791.744876$	$\Sigma Y_t^2 = 4310.330182$	

$$\mathbf{n} = 7$$
 $\therefore \sum_{t=172.2892344}^{t} = 70.98080841$

$$\sum X_t Y_t = 1791.744876$$
 $\sum Y_t^2 = 4310.330182$

$$\sum_{t=0}^{\infty} X_{t}^{2} = 785$$
 $X_{t}^{2} = 24.61274777$

$$\ddot{X}_{t} = 10.14011549$$

* 2	*	a j e	* 2	
X_t	Ϋ́t	e _t	e _t	
	_	÷	_	
30.63654461	21.49190313	-4.56771835	20.86405092	
49.9857165	22.53218468	2.71667635	7.380330391	
74.04751567	23.57246622	2.35011148	5.523023968	
102.8219422	24.61274777	1.17176628	1.37306215	
136.3089958	25.65302932	0.58864654	0.346504749	
174.5086768	26.69331086	-0.27010901	0.072958877	
217.420985	27.73359241	-1.98937324	3.957605888	
$\sum_{t=0}^{8} X_{t}^{2} = 785.7303766$	$\sum \hat{\hat{Y}}_{t} = 172.2892344$	$\sum_{t=0}^{t} e_{t} = 0$	$*^{2}$ $\sum e_{t} =$ 39.51753694	

$$\begin{split} & \sum_{\mathbf{X}_{t}}^{*} \mathbf{y}_{t}^{*} = \sum_{\mathbf{X}_{t}}^{*} \mathbf{Y}_{t} - \frac{(\sum_{\mathbf{X}_{t}}^{*})(\sum_{\mathbf{y}_{t}}^{*})}{n} \\ & = 1791.744876 - \frac{(70.98080841)(172.2892344)}{7} \\ & = 1791.744876 - 1747.032734 \\ & = 44.712142 \end{split}$$

$$& \sum_{\mathbf{X}_{t}}^{*2} = \sum_{\mathbf{X}_{t}}^{*2} - \frac{(\sum_{\mathbf{X}_{t}}^{*})^{2}}{n} \end{split}$$

$$= 785.730766 - \frac{(70.98080841)^2}{7}$$
$$= 785.730766 - 719.7535946$$
$$= 65.976782$$

*	* *	* *	
e_{t-1}	$e_t - e_{t-1}$	$\left(e_{t}-e_{t-1}\right)^{2}$	
-	-	-	
	gishin		
-4.56771835	7.2843947	53.06240615	
2.71667635	-0.36656487	0.134369803	
2.35011148	-1.1783452	1.38849741	
1.17176628	-0.58311974	0.340028631	
0.58864654	-0.85875555	0.737461094	
-0.27010901	-1.71926423	2.955869493	
		$\sum_{t=0}^{\infty} \left(e_{t} - e_{t-1} \right)^{2} =$	
		58.61863258	

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum_{t} x_t y_t}{\sum_{t} x_t} = \frac{44.712142}{65.976782} = 0.677695101$$

$$\hat{B}_{0} = Y_{t} - \hat{B}_{1} X_{t}$$

$$= 24.61274777 - (0.677695101) (10.14011549)$$

$$= 24.61274777 - 6.871906591$$

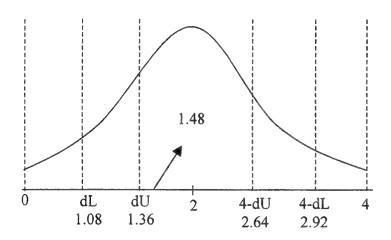
$$= 17.74084118$$

$$\dot{\hat{\mathbf{Y}}}_{t} = \hat{\mathbf{B}}_{0} + \hat{\mathbf{B}}_{1} \overset{*}{\mathbf{X}}_{t}$$

*
$$\hat{Y}_t = 17.74084118 + 0.677695101X_t$$

$$D.W = \frac{\sum_{t=0}^{*} \frac{1}{e_{t} - e_{t-1}^{2}}}{\sum_{t=0}^{*} e_{t}}$$

$$D.W = \frac{58.61863258}{39.51753694} = 1.483357444$$



وبمقارنة قيمة D.W المحتسبة مع مثيلتها الجدولية عند مستوى معنوية 5% يتضم بأن:

dU < D.W < 4-dU

1.36 < 1.48 < 2.64

عليه نقبل فرضية العدم والتي تنص على انعدام وجود ارتباط ذاتي بين القيم المتتالية للمتغير العشوائي.

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.5: باحث اقتصادي استخدم أسلوب (OLS) لتقدير دالة الاستير ادات التالية:

$$\hat{Y}_t = -2461 + 0.28X_t$$

S.E (250) (0.01)
$$r^2 = 0.98$$

ومن الانحرافات $e_t = Y_t - \hat{Y}_t$ وجد أن:

$$\sum_{t=2}^{20} (e_t - e_{t-1})^2 = 537192 \quad , \quad \sum_{t=1}^{20} e_t^2 = 573069$$

المطلوب: أحسب إحصاءه (D.W) واختبر لوجود مشكلة الارتباط الذاتي استخدم (D-W) مستوى دلالة لقيمة عليا ودنيا لإحصاءه (D-W) مساوية إلى

السؤال 2.5: فرضاً باحث قدر العلاقة بين المتغير (Y_t) والمتغير (X_t) وحصل على النتيجة التالية:

$$\hat{Y}_t = 6.65 + 2.75X_t$$

مع المعلومات التالية:

$$D - W = 0.8229$$
 , $\sum_{t=2}^{n} e_{t} \cdot e_{t-1} = 110.29$, $\sum_{t=2}^{n} e_{t-1}^{2} = 185.6775$

المطلوب: من قيمة D-W وجد أن هناك ارتباط ذاتي موجب، قدره وضع الخطوات المطلوب: من المعالجة هذه المشكلة في الجانب التطبيقي.

السوال 3.5: المتغير العشوائي (Y_t) يرتبط بالمتغير المستقل (X_t) وفق نموذج الانحدار الآتى:

$$E(U_t) = 0$$
, $var(U_t) = \sigma^2$

 $Y_i = B_0 + B_1 X_t + U_t$

وقد وجد بأن الخطأ العشوائي (U_t) يتبع الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى بمقدار $\hat{\rho}$.

المطلوب: اشرح الخطوات اللازمة لمعالجة أثر الارتباط الذاتي عند تقدير كل من (B_1) ، (B_0)

السؤال 4.5: ان مشكلة الارتباط الذاتي تنشأ عند استخدام بيانات السلاسل الزمنية ولا

تنشأ عند استخدام بيانات المقطع العرضي، ناقش هذه العبارة موضحا طبيعة المشكلة، وما هي النتائج المترتبة على وجودها في تحليل الانحدار.

 $\hat{Y}_t = -2461 + 0.28X_t$ S.E (250) (0.01) $r^2 = 0.98$

ومن الانحرافات،
$$\hat{\mathbf{q}}_{i}=\mathbf{q}_{i}=\mathbf{q}_{i}$$
، وجد أن:

السؤال 5.5: باحث اقتصادي استخدم أسلوب (OLS) لتقدير دالة الاستيرادات الآتية:

$$\sum_{t=2}^{20} (e_t - e_{t-1})^2 = 537192 \quad , \quad \sum_{t=2}^{20} e_t^2 = 573069$$

المطلوب:

احسب إحصاءة D-W واختبر لوجود مشكلة الارتباط الذاتي، استخدم (5%) مستوى دلالة لقيمة عليا ودنيا لإحصاءة (D.W) مساوية إلى :

dU = 1.41 , dL = 1.20

السوال 6.5: البيانات الآتية تبين بواقي المربعات الصغرى لإحدى علقات النظرية الاقتصادية:

e_t: 260, 29, 148, -57, -76, -181, 40, -81, -89, 22, 81, 293, -82, -157, -363

المطلوب:

أ- اختبر وجود مشكلة الارتباط الذاتي علماً ان قيمة dL=1.08 ، dU=1.36 ، dL=1.08 . ب- اشرح الخطوات اللازمة لمعالجة أثر هذه المشكلة إن وجدت.

الفصل السادس: مشكلة التعدد الخطي

The MULTICOLLINEARITY PROBLEM

- 1.6 المقدمة.
- 2.6 طبيعة الارتباط الخطى.
- 3.6 أسباب حدوث ظاهرة التعدد الخطي.
 - 4.6 أنواع التعدد الخطى:
 - 1.4.6 غياب التعدد الخطى.
 - 2.4.6 التعدد الخطى التام.
 - 3.4.6 التعدد الخطى غير التام.
- 5.6 النتائج المترتبة على وجود التعدد الخطى.
 - 6.6 طرق اختبار وجود التعدد الخطي:
 - 1.6.6 اختبار Firsch
 - 2.6.6 طريقة Z.6.6
 - χ^2 اختبار مربع کاي، 1.2.6.6
 - F معامه 2.2.6.6 اختبار
 - 3.2.6.6 اختبار إحصاءه t.
 - 3.6.6 اختبار كلاين.
 - 7.6 طرق معالجة مشكلة التعدد الخطي.
 - 8.6 الأسئلة والتمارين.

الفصل السادس: مشكلة التعدد الخطى

The Multicollinearity problem

1.6 مقدم____ة:

ينص أحد الافتراضات الخاصة بنموذج الانحدار الخطي بعدم وجود ارتباط خطي تسام بين قيم مشاهدات المتغيرات المستقلة الداخلة في نموذج الانحدار المراد تقديره، أي أن:

$r_{x_i x_j} \neq 1$

وفي حالة اعتماد قيمة أحد المتغيرات المستقلة على قيمة واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة في النموذج المدروس ينتفي الافتراض الخاص بانعدام الارتباط فتظهر مشكلة تدعى بمشكلة التعدد الخطى، The Multicollinearity Problem.

وتجدر الإشارة هذا إلى أن التعدد الخطي بين المتغيرات المستقلة لا يشكل مشكلة إلا إذا تجاوزت شدته حداً معيناً يتعذر عندها تحديد تأثير أي منها على المتغير التابع بشكل منفصل، حيث أنه غالباً ما يكون هذالك قدر من الارتباط لسبب أو لآخر، ما بين المتغيرات المستقلة تميل إلى التحرك سوياً على مر الزمن تحت تأثير العوامل الاقتصادية نفسها، مثلاً في فترات الرواج الاقتصادي تميل كل من الدخل، الأسعار، العمالة، الإنتاج، الاستهلاك، الاستثمار،..الخ نحو الارتفاع، بينما يحدث العكس في فترات الكساد.

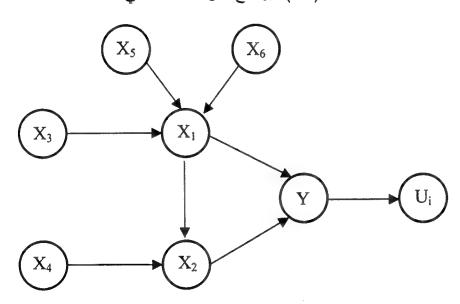
وسيتناول هذا الفصل طبيعة وأسباب الارتباط الخطي وآثاره وكيفية تحديده والحلول والمعالجات المقترحة للارتباط الخطي.

2.6 طبيعة التعدد الخطي، The Nature of Multicollinearity:

يقصد بالتعدد الخطي، Multicollinearity، طبقاً لمفهوم

لمتغيرات المستقلة المتضمنة في نموذج الانحدار المراد دراسته لــ X من متغيرات المتغيرات المستقلة المتضمنة في النموذج ($X_1, X_2, ..., X_k$) . فإذا كانت هذه العلاقة الخطية الانحدار المتضمنة في النموذج ($X_1, X_2, ..., X_k$) . فإذا كانت هذه العلاقة الخطية تامــة، Perfect ، أي $r_{X_1X_2}=1$ معنى ذلك أن معامل الارتباط يساوي واحد . ففــي هذه الحالة لا يمكن فصل أثر X_1 و X_2 عن بعضها البعض. ويلاحظ أنه في الحــياة الواقعــية دائماً توجد علاقة بين المتغيرات الاقتصادية ولا يوجد دليل يوضح درجــة الارتــباط التي إذا ظهرت فإنها ستؤثر بصورة خطيرة على تقدير المعلمات، ولكن من المعروف أنة إذا كان لدينا متغيرين مستقلين يتغيران تقريباً في نفس الاتجاه فأنه من الصعب فصل أثر كل منهما على المتغير التابع. وبالإمكان توضيح ذلك من خلال المخطط الآتي:

شكل (1.6): يوضح آثار التعدد الخطى



عند استخدام البیانات في تقدیر نموذج الانحدار المتعدد، غالباً ما یوجد بعض الارتباط، أو بعض درجات الاعتماد الخطي بین المتغیرات المستقلة، والشکل (1.6) یبیس الارتباطات السببیة في حالة افتراضیة اتجاه السببیة في المتغیرات. فالمتغیر ((X_1)) یوئسر بشکل مباشر بالمتغیر ((X_2)). والمتغیر ((X_1)) یوئشر بشکل مباشر بالمتغیر ((X_1)) والمتغیر ((X_1)) والمتغیر ((X_1)) والمتغیر ((X_1)) بشکل مباشر بالمتغیرات ((X_1)) و غیر مباشر بالمتغیر ات الأخری. یلحظ أن المتغیر ((X_1)) له أثار مباشرة و غیر مباشسرة علی المتغیر التابع، ((X_1)). ویمکن ملاحظة أن المتغیر العشوائي، ($((X_1))$)، یتأثر بشکل مباشر بالمتغیر السابع، ($((X_1))$) و لیست له أي ارتباط بأي من المتغیرات المستقلة مباشوضحة فی الشکل (1.6).

3.6 أسباب حدوث ظاهرة التعدد الخطي:

- 1- من الممكن أن تتغير بعض المتغيرات المستقلة سوية، فعلى سبيل المثال، وفي فيترة الازدهار الاقتصادي يلاحظ أن المتغيرات الاقتصادية كالدخل والاستثمار تزداد بوقت واحد، وتتخفض في وقت واحد في فترة الكساد. لذلك فعندما نستخدم هذه المتغيرات كمتغيرات تفسيرية في النموذج تبرز ظاهرة التعدد الخطي، مما يجعل من الصعب أو المستحيل عزل تأثيراتها الفردية على المتغير التابع.
- 2- استخدام المتغيرات المتخلفة زمنياً كمتغيرات تفسيرية في النموذج. فعلى سبيل المـــثال، يستخدم الدخل الحالي، والدخل السابق كمتغيرات تفسيرية سوية في الــنموذج. ومن الطبيعي أن القيم المتطابقة لأي متغير اقتصادي تُظهر نوع من الارتباط، ولهذا السبب تظهر مشكلة الارتباط الخطى المتعدد.

$$C_t = B_0 + B_1 X_t + B_2 X_{t-1} + U$$

فإذا كان:

$$X_1 = 2X_2$$
 Or:

$$X_1 = X_2^2$$

هذا يؤدي إلى وجود تعدد خطي.

4.6 أنواع التعدد الخطى:

1.4.6 غياب التعد الخطى، Absence of Multicollinearity

تحدث هذه الحالة عندما لا ترتبط المتغيرات المستقلة X_i في نموذج الانحدار الخطي المتعدد ارتباطاً خطياً وبالتالي فأن مصفوفة (X'X) تصبح مصفوفة قطرية وتأخذ الصيغة التالية:

$$(X'X) = \begin{bmatrix} \sum X_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sum X_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sum X_k^2 \end{bmatrix}$$

وأن مقلوب المصفوفة سيكون قطرياً أيضاً وللعناصر المعطاة بواسطة المصفوفة (X'X) وتحسب المعلمات (\mathring{b}_i) بموجب الصيغة التالية:

$$\hat{B}_{i} = \frac{\sum x_{i} y}{\sum x_{i}^{2}}$$
 (i = 1, 2, ..., k)

وبالتالي فلا توجد حاجة إلى نموذج الانحدار المتعدد ويقدر الثابت $\hat{\mathrm{B}}_0$ بموجب:

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{B}}_i \overline{\mathbf{X}}_i \qquad (i = 1, 2,, k)$$

يتبين مما يسبق بأن هذه الصيغ مطابقة لانحدار Y البسيط على كل متغير من المتغيرات المستقلة X_i بشكل مستقل.

2.4.6 التعدد الخطى التام، Exact Multicollinearity:

إن حالــة الــتعدد الخطى التام هي حالة مثالية غير ممكنة التحقق في الواقع العملــي ذلك أنها تتحقق فقط في حالة وجود علاقة خطية تامة بين قيم أثنين أو أكثر من المتغيرات المستقلة، ويمكن حينذاك التعبير عن واحد أو أكثر من المتغيرات المستقلة كتركيب خطي للمتغير أو المتغيرات المستقلة الأخرى. ولتوضيح هذه الحالة نفترض وجود نموذج انحدار خطي متعدد يحتوي متغيرين مستقلين وكما يلي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + U_i$$
 ...(1.6)

الذي يمكن تقدير معلماته بموجب الصيغة التالية:

$$\hat{\mathbf{B}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}$$

حيث محدد المصفوفة:

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1 X_2 \\ \sum X_1 X_2 & \sum X_2^2 \end{vmatrix}$$
$$= (\sum X_1^2) (\sum X_2^2) - (\sum X_1 X_2)^2$$

فوجود علاقة خطية تامة بين قيم مشاهدات المتغيرين المستقلين X_1 و X_2 يمكن التعبير عنها كما يلى:

$$X_2=
ho X_1$$
حيث ho عبارة عن قيمة ثابتة لا تساوي الصفر، فالمحدد $|X'X|$ تكون:

$$\begin{aligned} |X'X| &= \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \rho \sum X_1^2 \\ \rho \sum X_1^2 & \rho^2 \sum X_1^2 \end{vmatrix} \\ &= (\sum X_1^2) (\rho^2 \sum X_1^2) - (\rho \sum X_1^2) (\rho \sum X_1^2) \\ &= \rho^2 (\sum X_1^2)^2 - \rho^2 (\sum X_1^2)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

وبالتالي لا يمكن حساب معكوس المصفوفة $(X'X)^{-1}$ وتسمى هذه المصفوفة بالمصفوفة الشاذة وعليه لا يمكن الحصول على مقدرات OLS المعطاة بالقانون $\hat{B} = (X'X)^{-1}X'Y$

:No Exact Multicollinearity التعدد الخطي غير التام، 3.4.6

يتضح مما سبق أن حالتي التعدد الخطي التام وغياب التعدد الخطي هما حالستان لا تحدثان في الحياة العملية. وفي الواقع هناك دائماً علاقة أرتباطية بدرجات مستفاوتة بين المتغيرات المستقلة تقع ضمن الحالتين المتطرفتين المذكورتين إلا وهو التعدد الخطي غير التام ويسود دراسات القياس الاقتصادي خاصة تلك التي تعتمد على بيانات السلاسل الزمنية نسبة لتحرك هذه السلاسل سوية في اتجاه واحد وذلك لمختلف

المتغيرات الاقتصادية، وتشير هذه الحالة إلى الوضع الذي يكون فيه بين متغيرين مستقلين أو أكثر في نموذج الانحدار المتعدد ارتباط خطي ولكنه غير تام ولتوضيح ذلك نفترض النموذج التالي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + U_i$$

وإن هناك علاقة خطية غير تامة بين قيم مشاهدات المتغيرين X_1 و X_2 ممثلة بالمعادلة الآتية:

$$X_2 = \rho X_1 + V$$

حيث V متغير يمكن تمثيله بالمقدار الآتية:

$$\sum X_1 V = \sum V = 0$$

عليه يمكن كتابة محدد المصفوفة كالآتي:

$$|X'X| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \sum X_1(\rho X_1 + V) \\ \sum X_1(\rho X_1 + V) & \sum (\rho X_1 + V)^2 \end{vmatrix}$$

$$\left|X'X\right| = \begin{vmatrix} \sum X_1^2 & \rho \sum X_1^2 + \sum X_1 V \\ \rho \sum X_1^2 + \sum X_1 V & \rho^2 \sum X_1^2 + 2\rho \sum X_1 V + \sum V^2 \end{vmatrix}$$

$$\left| X'X \right| = \rho^2 (\sum X_i^2)^2 + 2\rho \sum X_i V \sum X_i^2 + \sum X_i^2 \sum V^2 - [\rho^2 (\sum X_i^2)^2 + 2\rho \sum X_i V \sum X_i^2 + \sum X_i^2 V^2]$$

وبعد فك القوس والاختصار، نحصل:

$$|X'X| = \sum X_i^2 \sum V^2 - \sum X_i^2 V^2$$

وبما ان X'X > 0 وان $V^2 > 0$ فان محدد المصفوفة (X'X) لايساوي الصغر وهكذا يمكن الحصول على المعكوس X'X).

5.6 النتائج المترتبة على وجود التعدد الخطى:

تحتفظ مقدرات OLS بخاصية الخطية وعدم التحيز فيما لو كان النموذج قد حدد بدقة، ولكنه لا يكتسب خاصية الكفاءة أي أقل تباين ممكن، إذ إنه بتزايد درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة فأن محدد المصفوفة (X'X) يبدأ بالتناقص وينعكس ذلك على عناصر معكوس المصفوفة (X'X)، حيث يأخذ قيم مرتفعة مما يقود إلى ارتفاع التباين المشترك، والذي يقود النابين المشترك، والذي يقود بحوره إلى زيادة حجم الأخطاء المعيارية فيؤشر بصورة خاطئة عدم معنوية بعض المتغيرات المستقلة في النموذج نتيجة تناقص قيم (1) المحتسبة بالمقارنة مع القيم الجدولية، والذي يقود بالباحث خطأ إلى حذف المتغيرات غير المعنوية من النموذج، والذي يؤدي إلى كبر حجم التباين ومن ثم الوصول إلى القياسات غير الدقيقة وبالتالي صعوبة الاعتماد على النتائج بثقة.

وهنا لابد أن نشير إلى إن تباين معاملات النموذج المقدرة في هذه الحالة $\hat{\mathbf{B}}=0$ و $\mathbf{var}(\hat{\mathbf{B}})=\infty$. ويجب التأكيد في هذا المجال على نقطتين هما:

أ- إن تقدير المعلمات المقدرة غير متحيزة، أي أن $E(\hat{B}) = B$ حتى عندما يكون الارتباط الخطي قوي فأن الخاصية الإحصائية لعدم التحيز لا تعتمد على هذا الافتراض.

ب- تشير بعض الدر اسات التطبيقية إلى أن الارتباط الخطي يكون مشكلة غير مهمة إذا كان:

$$R_{y.x_1,x_2}^2 \ge r_{x_1x_2}$$

أي ان $r_{x_1x_2}$ أقل أو يساوي R^2_{y,x_1,x_2} ويكون مؤثر على القياس، اذا كان:

$$R_{y.x_1,x_2}^2 < r_{x_1x_2}$$

6.6 طرق اختبار وجود التعدد الخطي:

هـ ناك عـ دد من الاختبارات لاكتشاف التعدد الخطي ولكن سنتناول أهم هذه الاختبارات:

1.6.6 اختبار Firsch

يشير هذا الاختبار إلى ان خطورة التعدد الخطي تعتمد على درجة الارتباط بين X_1 و عليه يمكن اقتراح استعمال بين X_2 و غضي التحديد X_1 و عليه يمكن اقتراح استعمال العناصر الآتية للاختبار الخاص بمشكلة التعدد الخطي وهي:

$$R_{y,x_1,x_2}^2$$
 , $r_{x_1x_2}$, Se الخطأ المعياري

ولكن يجب أن يفهم بأن أي من هذه العناصر لمفرده لا يمكن الاستفادة منه وذلك للأسباب الآتية:

- أ- الأخطاء المعيارية الكبيرة لا تعني دائماً أن هناك مشكلة ارتباط خطي، فقد تعود أسبابها إلى مشاكل قياسية أخرى.
- ب- الارتسباط بين المتغيرات المستقلة قد يكون مرتفعاً أو قد يكون منخفضاً،
 وبالرغم من ذلك قد لا تتأثر قيم المعلمات أو أخطاءها المعيارية.
- جــ ربما تكون قيم معامل التحديد، \mathbb{R}^2 ، مرتفعة نسبة إلى معامل الارتباط بين X_1 ومع ذلك فالنتائج قد تكون غير دقيقة وغير مهمة.

ولهذه الأسباب يتطلب الأمر تحليل هذه العناصر الثلاثة أعلاه مجتمعة للحكم على وجود التعدد الخطي من عدمه.

ويتم الأجراء وفقاً لهذا الاختبار عن طريق إيجاد معادلة الانحدار للمتغير الستابع على حدة ثم بعد ذلك نقوم بإجراء الاختبار على وفق المعايير الإحصائية المتعارف عليها ثم نختار معادلة الانحدار التي تعطي أفضل النتائج. وعلى أية حال، يمكن استعمال مجموعة من المعايير لاكتشاف مشكلة التعدد الخطي، ولمعرفة خطورة هذه المشكلة في معادلة الانحيار لاكتشاف مشكلة التعدد الخطي، الذي يتضمن الحصول على معادلة انحيار المتغير التابع على كل من المتغيرات المستقلة على حده، ثم تقيم نتائج التقدير المتحصل عليها من حيث قيمة معامل التحديد، 2 م، والأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعاملات الانحدار ومن ثم القيام بأجراء اختيار المعادلة المقدرة التحديد تقدير ها أكثر قبولاً من باقي المعادلات المقدرة، ويجب أن تتميز المعادلة المقدرة المختارة بالآتي:

- أولاً: أن تكون قيمة معامل التحديد، R^2 ، الخاصة بها أكبر من مثيلتها لأي معادلة مقدرة أخرى.
- ثانياً: أن تكون الأخطاء المعيارية للقيم المقدرة لمعلمات الانحدار الخاصة بها أقل من مثيلتها لأي معادلة مقدرة أخرى.

لغرض توضيح هذه الطريقة، أفترض لدينا المعادلة الآتية:

$$Y = f(X_1, X_2, X_3,, X_k)$$

والتي يُمكن وصفها بالشكل الآتية:

$$Y = f(X_1)$$

$$Y = f(X_2)$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$Y = f(X_k)$$

وبافتراض أن أفضل النتائج يُمكن الحصول عليها من $Y = f(X_2) = Y$ عندئذ نقوم بأخذ أفضل معادلة ونضيف عليها في كل مرة متغير جديد ونجري عليها الاختبار، فإذا كانت المشكلة موجودة نحذف المتغير المضاف ونضيف متغير جديد.

وبعد ذلك نبدأ تدريجياً في إضافة المتغيرات المستقلة الواحدة تلو الأخرى إلى المعادلة التي تم اختيارها ثم اختبار آثار كل منها على قيمة \mathbb{R}^2 والخطأ المعياري والقيم المقدرة لمعاملات الانحدار ويعتبر المتغير المستقل المضاف إلى المعادلة مفيد أو زائد وفقاً للحالات الآتية:

- 1 أذا أدت إضافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار أي تحسن في قيمة معامل الستحديد، \mathbb{R}^2 ، دون التأثير على قيم المعلمات، فأن المتغير المستقل المضاف يعتبر مفيداً.
- 2- إذا لم تؤدي إضافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار أي تحسن في قيمة معامل المتحديد، R²، ولا يؤثر على قيم معلمات الانحدار، فأن هذا المتغير المضاف يعتبر زائداً ولا حاجة له لذا يجب حذفه من المعادلة.

3- إذا أدت إضافة المتغير المستقل إلى معادلة الانحدار إلى التأثير على إشارة وقيم المعاملات مما يجعلها غير مقبولة من الناحية الإحصائية والاقتصادية، فأنه يعتبر غير مفيد ولا حاجة لوجوده في معادلة الانحدار.

متسال 1.6: إذا توفرت لدينا البيانات الآتية والخاصة بدالة الطلب على الملابس:

Year	الإنفاق على الملابس C	الدخل لمتاح Y	الأصول السائلة L	الرقم القياسي للملابس 1993=100 P _c	الرقم القياسي العام 1993=100 P _o
1989	8.4	82.9	17.1	92	94
1990	9.6	88.0	21.3	93	96
1991	10.4	99.9	25.1	96	97
1992	11.4	105.3	29.0	94	97
1993	12.2	117.7	34.0	100	100
1994	14.2	131.0	40.0	101	101
1995	15.8	148.2	44.0	105	104
1996	17.9	161.8	49.0	112	109
1997	19.3	174.2	51.0	112	111
1998	20.8	184.7	53.0	112	111

وحسب مفهوم النظرية الاقتصادية، فإن دالة الأنفاق على الملابس تكون:

$$C = B_0 + B_1 Y + B_2 L + B_3 P_c + B_4 P_o + U_i$$

وبتطبيق طريقة المربعات الصغرى على هذه الدالة، حصلنا على المعادلة التقديرية التالية:

$$C = -13.53 + 0.097Y + 0.015L - 0.199P_c + 0.34P_o$$
Se (7.5) (0.03) (0.05) (0.09) (0.15)

$$R^2 = 0.998$$
, $\sum \hat{y}^2 = 28.15$, $\sum e_i^2 = 0.33$, $DW = 3.4$

وبتطبيق تحليل التباين لاختبار مدى أهمية هذه المعادلة، نحصل على ما يلى:

$$F = \frac{\sum \hat{y}^2 / (k-1)}{\sum e_i^2 / (n-k)} = \frac{28.15/4}{0.33/5} = 15.6$$

حيث أن قيمة F الجدولية عند مستوى معنوية 5% هي 5.19، وفي هذه الحالة نرفض فرضية العدم، H_0 ، القائلة بأنه لا توجد علاقة بين الأنفاق على الملابس من جهة والمتغيرات المستقلة من جهة أخرى، ونقبل الفرض البديل، H_1 ، القائل بوجود هذه العلاقة.

ومن حل البيانات نحصل على مصفوفة الارتباط بين المتغيرات وكما يلي:

$$r_{YL} = 0.99$$
 , $r_{LPc} = 0.96$

$$r_{yPc} = 0.98$$
 , $r_{LP0} = 0.92$

$$r_{YP0}=0.99$$
 , $r_{PcP0}=0.99$

ولغرض توضيح تأثير الارتباط الخطي لابد من تقدير معادلة الانحدار للمتغير التابع مع كل متغير مستقل على حدة، وبذلك نحصل على المعادلات التالية:

1)
$$\hat{C} = -1.24 + 0.118Y$$
 $R^2 = 0.995$
Se (0.37) (0.002) $D.W = 2.6$

2)
$$\hat{C} = -38.51 + 0.516P_c$$
 $R^2 = 0.951$
Se (4.20) (0.04) $D.W = 2.4$

3)
$$\hat{C} = 2.11 + 0.327L$$
 $R^2 = 0.967$ Se (0.81) (0.02) $D.W = 0.4$

4)
$$\hat{C} = -53.65 + 0.663P_o$$
 $R^2 = 0.977$
Se (3.63) (0.03) $D.W = 2.1$

وحيث أنه في النظرية الاقتصادية، يعتمد الاستهلاك على الدخل، لذا نأخذ التقدير الأول لمعادلة الانحدار كأفضل معادلة مقدرة، ونجري عليها الانحدار بإضافة المتغيرات المستقلة إليها وكما هو مبين في الجدول الآتي:

المعادلة	Bo	\mathbf{Y} \mathbf{B}_1	P _c B ₂	$egin{array}{c} \mathbf{L} \\ \mathbf{B_2} \end{array}$	P _o B ₃	R ²	D.W
C=F(Y)	-1.24 (0.37)	0.118 (0.002)		_		0.995	2.6
C=F(Y,P _c)	1.40 (4.92)	0.126 (0.01)	-0.036 (0.07)			0.996	2.5
C=F(Y,P _c ,L)	0.94 (5.17)	0.138 (0.02)	-0.034 (0.06)	-0.037 (0.05)	_	0.996	3.1
$C=F(Y,P_c,P_o)$	-12.76 (6.52)	0.104 (0.01)	-0.188 (0.07)		0.319 (0.12)	0.997	3.5
$C=F(Y,P_c,L,P_0)$	-13.53 (7.5)	0.097 (0.03)	-0.199 (0.09)	0.015 (0.05)	0.34 (0.15)	0.998	3.4

ونلاحظ من التحليل أن إضافة المتغير P_c إلى المعادلة أدى إلى زيادة حقيقية في قيمة معامل الستحديد، \hat{B}_1 ويلاحظ أيضاً أن المعاملات، \hat{B}_0 و \hat{B}_1 أخذت إشار اتها الصحيحة، إلا إن الخطأ المعياري الخاص بقيمة \hat{B}_2 يوضح بأنها ليست ذات أهمية إحصائية. وكذلك فأن إضافة الأصول السائلة، L، لا تعطي نتائج مهمة للمعاملات

المقدرة \hat{B}_2 و وذلك بسبب الارتباط الذاتي بين أسعار الملابس، P_c ، والأصول السائلة، L ، مما جعل من الصعب الحصول على تقديرات لهذه المعلمات ذات أهمية، وذلك لأن الخطأ المعياري أكبر من قيمة المعامل B_1 لهذه المعلمات.

ولكن بالرغم من الارتباط بين الأنفاق الاستهلاكي، C ، وأسعار الملابس، P_c والأصدول السلطة، L ، إلا أن قديمة B_1 لم تتأثر وعليه يمكن اعتبار الأصول السائلة، L ، متغير زائد لا حاجة لوجوده وهنا يسقط المتغير، L .

أن إسقاط المتغير L وإضافة المتغير P_0 ، أسعار السلع الأخرى، في المعادلة، يلاحظ أن قيمة R^2 زادت بنسبة طغيفة، كما أنه يلاحظ بعد إضافة أسعار السلع الأخرى، P_0 ، أن كل المعاملات تأخذ الإشارات المتوقعة وإلى حد ما زادت الأهمية الإحصائية.

أما معادلة الانحدار بالنسبة لكافة المتغيرات المستقلة، توضح بأن مشكلة التعدد الخطي ليست خطيرة بالنسبة للمعاملات \hat{B}_1 و \hat{B}_2 .

كما أن معامل الأصول السائلة، \hat{B}_3 ، ليس ذات أهمية إحصائية وعليه يمكن إسقاط المتغير المستقل، L.

وبذلك يمكن أن تتلخص العلاقة التالية، كأفضل ما يمكن الحصول عليه:

 $C=F(Y, P_c, P_o)$

2.6.6 طريقة FARRAR- GLAUBER

نشـــرت هذه الطريقة لأول مرة عام 1967 لمقالة بعنوان التعدد الخطي في نمــوذج الانحـدار من قبل FARRAR and GLAUBER. وهذه الطريقة تقوم على ثلاثة اختبارات أساسية هي:

.Chi-Square ، χ^2 ولاً: اختبار مربع کاي

ثانياً: اختبار إحصاءه F.

ثالثاً: اختبار إحصاءه t.

وسنتناول بشيء من الايجاز عن كل اختبار من الاختبارات الثلاث أعلاه.

.Chi-Square ، χ^2 مربع کاي، 1.2.6.6

يستخدم هذا الاختبار لتحديد وجود أو عدم وجود مشكله التعدد الخطي في النموذج المقدر، ولتطبيق هذا الاختبار، يتم أتباع الخطوات الآتية:

أ- حساب قيمة محدد الارتباط الخطي، |R|، وأن قيمة المحدد تمثل معلمات الارتباط البسيطة بين كل متغيرين من المتغيرات المستقلة على حدة.

ب- وأن معامل الارتباط بين المتغير نفسه يساوي واحد صحيح. لذلك فأن القطر الرئيسي للمحدد سوف يكون عبارة عن واحد. أما بقية العناصر فسوف يكون أقل من الواحد الصحيح.

يفترض الاختبار وجود فرضيتين أساسيتين هما:

-1 فرضية العدم، H_0 : التي تنص على أن المتغيرات مستقلة.

-2 الفرضية البديلة، H_1 : وتنص على أن المتغيرات غير مستقلة.

والصيغة الرياضية لهذا الاختيار هي:

$$\chi^2 = -[n-1-\frac{1}{6}(2k+5)] \cdot \ln|R|$$
 ...(2.6)

حيث أن:

n: تمثل حجم العينة (عدد المشاهدات).

K: تمثل عدد المتغيرات المستقلة.

|R| اللوغاريستم الطبيعسي لمحدد مصفوفة معاملات الارتباطات الجزئية الجزئية:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} & \dots & r_{1k} \\ r_{21} & 1 & r_{23} & \dots & r_{2k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & r_{k3} & 1 \end{bmatrix}$$

ولما كانت قيمة المحدد تقع بين الصغر والواحد الصحيح فأنه قيمة $\ln |R|$ ستكون سالية دائماً.

ويمكن التمييز بين ثلاث حالات لمحدد الارتباط، |R| ، وكما يلي:

 X_2 فأن ذلك يعني أن تكون العلاقة 100% بين X_1 و فأن ذلك يعني أن تكون العلاقة 100% بين X_1 و X_1 ، أي يوجد تعدد خطي تام ولذلك تكون معاملات الارتباط البسيطة بين المتغيرين مساوية للواحد الصحيح وكما يلى:

$$\left|\mathbf{R}\right| = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{r}_{\mathbf{X}_{1}\mathbf{X}_{2}} \\ \mathbf{r}_{\mathbf{X}_{2}\mathbf{X}_{1}} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

-2 إذا كانت قيمة محدد الارتباط، 1=|R| معنى ذلك عدم وجود ارتباط بين المتغيرين X_1 X_2 و X_3 أي يكون معامل الارتباط بين كلا المتغيرين مساو للصفر مثلاً X_1 و X_2 و X_3 و كما مبين أدناه:

$$\left|\mathbf{R}\right| = \begin{vmatrix} 1 & & r_{X_1 X_2} \\ r_{X_2 X_1} & & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

-1 إذا كانت قيمة محدد الارتباط محصورة بين الصفر والواحد الصحيح، أي -1 $|R| \ge 0$ معنى ذلك لابد من اتباع خطوات الاختبار لغرض معرفة الارتباط الخطبي والتي ذكرت سابقاً والمتضمنة اختبار الفرضيات وإيجاد قيمة χ^2 المحسوبة باستخدام المعادلة (2.6).

وبعد احتساب قيمة χ^2 تقارن مع قيمتها الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية $\frac{1}{2}$.k(k-1)/2

فإذا كانت القيمة المحتسبة أكبر من مثيلتها الجدولية ترفض فرضية العدم (Ho) وتقبل الفرضية السبديلة (H_1) أي أن هناك مشكلة تعدد خطي بين المتغيرات المستقلة في السنموذج وبالعكس في حالة كون قيمة χ^2 المحتسبة أقل من قيمتها الجدولية تقبل (Ho) أي أنه ليست هنالك مشكلة تعدد خطي بين المتغيرات المستقلة. وكلما كبرت القيمة المحسوبة مقارنة بنظيرتها الجدولية كلما دل ذلك على أن مشكلة التعدد الخطي أشد.

مشـــال 2.6: إذا كانت لدينا مصفوفة الارتباطات، R:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & 1 & r_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{k1} & r_{k2} & 1 \end{bmatrix}$$

وتوفرت لدينا المعلومات الآتية:

$$r_{12} = 0.8811$$
 , $r_{13} = 0.9399$, $r_{23} = 0.9866$ $n = 15$, $k = 4$

فأن محدد الارتباط | R |، يصبح كما يلي:

$$|R| = \begin{vmatrix} 1 & 0.8811 & 0.9399 \\ 0.8811 & 1 & 0.9866 \\ 0.9399 & 0.9866 & 1 \end{vmatrix} = 0.000969$$

$$\chi^2 = -[N-1-\frac{1}{6}(2K+5)]\ln|R|$$

$$\chi^2 = -[15 - 1 - \frac{1}{6}(2(4) + 5)] \ln 0.000969$$

$$\chi^2 = -[14 - \frac{1}{6}(13)] - 6.939$$

$$\chi^2 = -[14 - 6.5)(-6.939)$$

$$\chi^2 = 52$$

أما قيمة χ^2 الجدولية بدرجات حرية 2/(3)(4) والتي تساوي 6 وبمستوى معنوية χ^2 المحسوبة، وعليه نستنتج وجود مشكلة التعدد الخطي.

2.2.6.6 اختبار إحصاءه F:

وفي حالة وجود مشكلة التعدد الخطي في النموذج يتطلب الأمر تحديد المتغير المستقل (X) السذي ارتبط خطياً مع غيره من المتغيرات المستقلة (X) وتسبب في إحداث المشكلة، ويتم هذا من خلال اختبار (F) والذي يتطلب احتساب معامل التحديد المتعدد (F) بين كل متغير في النموذج (X) وبقية المتغيرات المستقلة (X) والصيغة الرياضية لهذا الاختبار هو:

$$F_{j} = \frac{(R_{X_{i},X_{1}X_{2}...X_{k}}^{2})/(k-1)}{(1-R_{X_{i},X_{1}X_{2}...X_{k}}^{2})/(n-k)}$$
 (j=1,2,3,...,k)

وبعد احتساب قيمة (F_j) تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية مساوية إلى (K-2)، (n-k-1) للبسط والمقام وبمستوى معنوية معين بهدف قبول أو رفض أحد هاتين الفرضيتين:

$$\begin{split} H_0: & R_{X_i, X_1 X_2 \dots X_k}^2 = 0 \\ & H_1: & R_{X_i, X_1 X_2 \dots X_k}^2 \neq 0 \end{split}$$

فسإذا كانت قيمة F المحتسبة إكبر من القيمة الجدولية ترفض H_0 وتقبل H_1 أي أن المتغيير المستقل X_i يرتبط خطياً مع بقية المتغيرات المستقلة. أما إذا كانت I_i المحتسبة أقل من مثيلتها الجدولية تقبل I_i أي أن المتغير I_i لا يرتبط خطياً مع بقية المتغيرات المستقلة ومن ثم فليسس لسه علاقة بوجود مشكلة التعدد الخطي الذي يعاني مسنه النموذج. وتكرر العملية لكل متغير من المتغيرات المستقلة في النموذج حتى يتم تشخيص المتغيرات المستقلة المتداخلة خطياً كلاً على انفراد.

3.2.6.6 اختبار إحصاءه t:

ولتحديد المتغيرات المستقلة المسؤولة عن حصول المشكلة يتطلب ذلك إجراء اختبار آخر هو أختبار (t) والذي يعتمد بدوره على قيم معاملات الارتباط الجزئية ما بين كل أثنين من المتغيرات المستقلة (r_{ij}) بصورة منفردة بافتراض ان بقية المتغيرات المستقلة في النموذج ثابتة. والصيغة الرياضية لهذا الاختبار:

$$t_{ij} = \frac{(r_{X_i X_j, X_1 X_2, ..., X_k}) \sqrt{n - k}}{\sqrt{(1 - r_{X_i X_j, X_1 X_2, ..., X_k}^2)}}$$

حيث أن:

قيمة معامل الارتباط الجزئي بين المتغيرين المستقلين X_i ، X_i ، وأعتبار أن بقية المتغيرات المستقلة ثانية.

وبعد احتساب قيمة t_{ij} تقارن مع قيمتها الجدولية بدرجة حرية (n-k) ومستوى معنوية معين لتحديد قبول أو رفض أحد الفرضيتين:

$$H_0: r_{X_i X_j . X_1 X_2 ..., X_k} = 0$$

$$H_1: r_{X_i X_j, X_1 X_2, ..., X_k} \neq 0$$

فإذا كانت القيمة المحتسبة أكبر من القيمة الجدولية ترفض H_0 وتقبل H_1 أي أن الارتباط الجزئي بين المتغيرين X_i X_i معنوي. وبالعكس فإن الارتباط الجزئي بين المتغيرين تكون القيمة المحتسبة أصغر من مثيلتها الجدولية، وتكرر العملية لكافة المتغيرات المستقلة في النموذج حتى يتم تشخيص المتغيرات المستقلة التعدد الخطي.

3.6.6 اختبار كلاين، KLIEN Test

يستخدم هذا الاختبار للكشف عن وجود (التعدد الخطي) حيث يتم مقارنة معامل التحديد R^2 مع مربع معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة. فاذا كان معامل الستحديد R^2 أكسبر من مربع معامل الارتباط بين المتغيرات المستقلة فهذا يعني عدم وجسود مشكلة التعدد الخطي وإن كان موجوداً فهذا لا يؤثر أو يكون غير مؤثر، أي أن:

$$R^2 > r_{X_i X_i}^2$$

7.6 طرق معالجة مشكلة التعدد الخطى:

- 1- محاولة توسيع حجم العينة وذلك بإضافة بيانات كافية عن متغيرات الظاهرة المدروسة، إذ تزداد التقديرات دقة بزيادة عدد البيانات التي تعتمد عليها في عملية التقدير نظراً لوجود علاقة عكسية بين حجم العينة وقيمة التباين، فكلما كبر حجم العينة كلما تم الحصول على معلومات إضافية تساعد على تخفيض حجم التباينات.
- 2- حــذف المتغير المستقل أو المتغيرات المستقلة التي تسببت في ظهور المشكلة في الــنموذج. ولكــن غالباً ما يستبدل هذا الحل للمشكلة بمشكلة أخرى، إذ أن حذف متغــير مســتقل معين له أهميته التفسيرية يوقع الباحث بمشكلة التوصيف (عدم إدخــال المتغيرات المهمة في النموذج) مما يرفع من احتمال تحيز المقدرات في تلك الحالة.
- 3. تحويل شكل الدالة بإستعمال النسب والفروقات عوضاً عن المتغيرات الاصلية.
 فعلى سبيل المثال النموذج التالى:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + U_i$$

يمكن اختيار احد المتغيرات المستقلة ولتكن مثلاً X_2 كمقام وتضرب المعادلة بها فنحصل على متغيرات جديدة وكالآتى:

$$\frac{Y_i}{X_2} = B_0 \frac{1}{X_2} + B_1 \frac{X_1}{X_2} + B_2 + \frac{U_i}{X_2}$$

غير أنه يلاحظ أن النموذج الجديد قد لا يستوفي أحد فروض OLS الاعتيادية إلا وهو (أنه لا يمتلك تباين ثابت لحدود الخطأ $\frac{U_i}{X_2}$ ، حيث أن:

$$E\left(\frac{U_{i}}{X_{2}}\right)^{2} = \frac{E(U_{i}^{2})}{X_{2}^{2}} = \frac{\sigma^{2}}{X_{2}^{2}} \neq \sigma^{2}$$

مما يعنى إستبدال المشكلة بمشكلة أخرى.

4- استخدام اسلوب الدمج بين بيانات السلاسل الزمنية والبيانات المقطعية فمثلاً يمكن استخدام المعلمة المستخدام المستخدام المستخدام المستخدام مقدر معلمة الميل الحدي للاستهلاك لفترة معينة ولقطر معين من دراسات المقاطع العرضية مع العلاقة بين الدخل والاسعار لنفس الفترة والقطر من دراسات السلاسل الزمنية.

الأسئلة والتمارين

السوال 1.6: الجدول التالي يبين السلسلة الزمنية لخمسة متغيرات، X_1 ، X_1 ، X_1 ، X_2 ، X_3 .

Y_i	X_1	X_2	X_3	X4
6.0	40.1	5.5	108	63
6.0	40.3	4.7	93	72
6.5	47.5	5.2	108	86
7.1	49.2	6.8	100	100
7.2	52.3	7.3	99	107
7.6	58.0	8.7	99	111
8.0	61.3	10.2	101	114
9.0	62.5	14.1	97	116
9.0	64.7	17.1	93	119
9.3	66.8	21.3	102	121

المطلوب: اختبار وجود مشكلة التعدد الخطى.

السؤال 2.6: ماذا يقصد بمشكلة التعدد الخطي؟ وما هي أنواعه؟ وكيف يتم معالجتها؟

السوال 3.6: قام أحد الباحثين بدراسة دالة الطلب على سلعة معينة، Y، فوجد ان هناك عاملين أساسيين تؤثران فيها هي سعر السلعة ، X_1 ، وسعر سلعة أخرى منافسة، X_2 ، وكما مبين في الجدول أدناه:

Y_i	X_1	X_2
9	1	6
7	2	6
5	3	5
5	4	2
4	5	1

المطلوب:

1- تقدير معلمات العلاقة.

2 اختبار وجود مشكلة التعدد الخطي باستخدام إحدى طرق الاختبار المناسبة مع أجراء المعالجات الضرورية في حالة وجود المشكلة.

الفصل السابع: مشكلة عدم تجانس التباين

The Heteroscedasticity Problem

- 1.7 المقدمة.
- 2.7 طبيعة مشكلة تباين حد الخطأ.
 - 3.7 أسباب تباين حد الخطأ.
 - 4.7 اكتشاف تباين حد الخطأ.
- 1.4.7 اختبار كولدفيلد وكوانت.
- 2.4.7 اختبار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان.
 - 3.4.7 اختبار بارتلیت.
 - 4.4.7 طريقة كليجسر.
 - 5.4.7 اختبار بارك.
 - 5.7 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين.
 - 6.7 الأسئلة والتمارين

الفصل السابع: مشكلة عدم تجانس التباين

The Heteroscedasticity Problem

1.7 المقدمـــة:

أحد الفرضيات الأساسية التي يقوم عليها النموذج الخطي (العام والبسيط) هو شبات التباين لحدود الخطأ (تجانس تباين الخطأ)، Homoscedasticity، لجميع المشاهدات (i)، أي:

$$EU_i^2 = \sigma_i^2$$

وفي النموذج الخطي العام فإن الفرض المناظر:

$$E(UU') = \sigma_i^2 In$$

وفي واقع الأمر، فإننا كثيراً ما نواجه حالات يتعسر فيها استيفاء الشرط أعلاه، ومن ثم فان التباين لا يكون ثابتاً بل يختلف لكل مشاهدة من مشاهدات العينة وتصبح لدينا قيم مختلفة وغيير ثابتة لتباينات حدود الخطأ العشوائية، وعليه فإن القطر الرئيس لمصفوفة التباين والتباين المشترك الخاصة بحدود الخطأ يحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة، أي إن:

$$E(UU') \neq \sigma_i^2 In$$

حيث إن:

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq ... \neq \sigma_n^2$$

ويحدث هذا أساساً في حالة الدراسات المعتمدة على البيانات الإحصائية المقطعية ويحدث هذا أساساً في حالة الدراسات المعتمدة على البيانات بحوث ميزانية الأسرة التي تشمل أسراً متباينة بشكل كبير في مستويات دخولها، فتشتت مشاهدات البيانات المقطعية الجزئية الخاصة بالمتغير التابع قد يختلف اختلافاً شديداً من مستوى إلى آخر مس مستويات المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة). فعلى سبيل المثال نجد ان دراسة دالة الاستهلاك التي تعتمد على دخل وانفاق العوائل على مختلف السلع والخدمات، تبين ان تباين الخطأ الخاص بالإنفاق الاستهلاكي لعائلات الدخل المرتفع عادة ما يكون اكبر عنه بالنسبة لتباين الخطأ الخاص بإنفاق العائلات ذات الدخل المرتفعة المنخفض، ذلك ان العوائل ذات الدخول المرتفعة تتمتع بمرونة كبيرة في الأنفاق، أما العوائل ذات الدخول المنخفضة فان أنفاقها يقع عادة ضمن حدود ضيقة، وعليه فان التشتت ومن ثم التباين عند قيم الدخول (X) الكبيرة يكون اكبر من التشتت ومن ثم التباين عند قيم (X) الصغيرة ومن ثم فان فرضية تجانس تباين الخطأ تصبح غير مجدينة، وخرق الفرض هذا يؤدي إلى ظهور مشكلة تدعى مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ، The Heteroscedasticity problem.

في هذا الفصل سوف نختبر سريان مفعول ثبات تباين حد الخطأ، أي أن $E(U_i^2) = \sigma^2$ ومحاولة معرفة ماذا يحصل إذا لم تتحقق الفرضية تلك. وعليه سنحاول الإجابة على الأسئلة الآتية:

- ما هي طبيعة مشكلة تباين حد الخطأ؟
 - ما هي أسباب المشكلة؟
- ما هي الآثار المترتبة على وجود هذه المشكلة؟
- وكيف يمكن اكتشافها ومن ثم أسلوب معالجتها؟

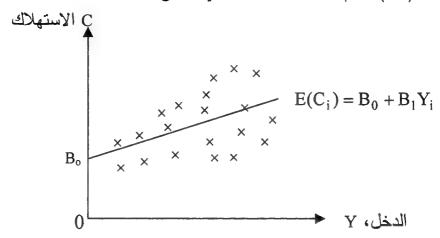
2.7 طبيعة مشكلة عدم تجانس حد الخطأ،

:The Nature of Heteroscedasticity

إن مشكلة تجانس الخطأ، Heteroscdasticity، تتكون من كلمتين، هما (Heteroscdasticity) بمعنى غير متساو و (Scedasticity) بمعنى تباعد او انتشار. فعند تغير قيمة تباين حد الخطأ، U_i ، بحيث تزداد هذه القيمة بزيادة قيمة المتغير المستقل، Y_i فإننا نواجه مشكلة تباين الخطأ.

ويمكن توضيح ذلك بيانياً في نموذج الانحدار البسيط المتضمن متغيرين كما في الشكل (1.7)، الذي يمثل العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي لاسرة ما، (1.7)، ومستوى الدخل لتلك الأسرة، (1.7) في حالة ثبات حد الخطأ، ويلاحظ من هذا الشكل إذا كانت قيمة تباين حد الخطأ يتغير بتغير قيمة حد الخطأ، (1.7) بحيث تزداد هذه القيمة بزيادة قيمة المتغير المستقل، فإننا نواجه مشكلة تباين حد الخطأ أو عدم تجانس حد الخطأ. وبافتراض أننا بصدد در اسة مستوى الاستهلاك لاسرة ما، وقد أخذنا عينة عشوائية من الأسر حجمها (1.7) وكان التباين في الاستهلاك يزداد كلما زاد دخل الأسرة، فالأسر التي تحصل على دخل أعلى يكون لديها مرونة أكبر من الاستهلاك، كما هو واضح في الشكل البياني.

الشكل (1.7): عدم تجانس حدد الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



ويلاحظ من الشكل أعلاه، ان تباين المتغير التابع (C) يزداد كلما زاد مستوى الدخل (Y)، ولذلك نجد ان حساب الأخطاء المعيارية في علاقة الاستهلاك بالدخل وبطريقة OLS، لا يساعدنا في الوصول إلى تقديرات غير متحيزة ومتوافقة، وذلك لان هذه الصيغة تفترض عدم ثبات تباين الخطأ، وبذلك فان اختبار الفرضية المعتمدة على هذه الأخطاء المعيارية تصبح غير سارية المفعول.

لذلك فان المقدرات تصبح غير فعّالة، وبعض طرق التقدير التي نحصل منها على مقدرات غير متحيزة سوف تكون تباينات العينة فيها صغيرة، لذلك إذا كانت البيانات المتوفرة كافية سوف يكون التقدير في هذه الحالة مرض.

لسوء الحظ، ان حساب الأخطاء المعيارية بطريقة OLS، التي تعتمد على الصيغة المنتظمة، تكون غير صحيحة، وذلك بسبب ان هذه الصيغة تفترض عدم ثبات تباين حد الخطأ، Heteroscedasticity، لذلك فان اختبار الفرضية التي تعتمد على الأخطاء المعيارية تصبح غير نافذة.

وتوجد طريقة بديلة لتحديد الأخطاء المعيارية والتي قام بتطويرها "هاربرت وايست" H.WHITE، وتوصلنا هذه الصيغة إلى تقديرات متوافقة لتباين العينة

المدروسة، وعلى اقل تقدير في العينة الكبيرة، وبذلك فان اختبار الفرضيات بطريقة WHITE تكون جاهزة كاختبار في معظم برامج الحاسوب.

مـــثال ذلك، بافتراض دراسة العلاقة بين الادخار، S، ومستوى الدخل، Y، الأســر وذلك باستخدام بيانات المقطع العرضي. وعند تقدير دالة الادخار، Saving للأســر وذلك باستخدام بيانات المقطع العرضي. وعند تقدير دالة الادخار، Function، والتــي ربمــا تعــرض عــدم تبايــن حد الخطأ للسبب نفسه، فان دالة الاستهلاك ربما تكون بصيغة خطية بسيطة، وبافتراض اننا حصلنا على النتائج الآتية:

$$\hat{S}_i = -1.062 + 0.295Y_i$$
 ...(1.7)
 $Se_1 = 0.851 = 0.075$
 $Se_2 = (1.233) = (0.152)$
 $R^2 = 0.137$, $Se = 4.154$

ان الأخطاء المعيارية الأولى، Se_1 تقترح بان الدخل له أثر معنوي جداً على الادخار Se_2 وذلك طبقاً لاختبار t المحسوبة Se_2 ، أما الأخطاء المعيارية المنقحة، Se_2 وذلك طبقاً لاختبار $t_1^* = 3.95$ المحسوبة لها تساوي $t_2^* = 1.95$ وهي تكون الضعف في الحجم، وإن قيمة t_2^* المحسوبة لها تساوي t_1^* ومن أم تمين أقل من قيمة t_1^* وإن استخدام اختبار ذات طرف واحد يكون ملائم، ومن ثم نحكم بسان الدخل يكون موجب ومعنوي عند مستوى معنوية 5% مع أن العامل لا يكون معنوياً عند إجراء الاختبار ذات الطرفين، ومن ثم فإن الأخطاء المعيارية الأولى، Se_1 وبما تقود إلى تقييم مضلل.

ولمواجهة مشكلة تباين حد الخطأ، والإبقاء على صحة الفرضية القائلة $E(U_iY_i)=0$. $(U_iY_i)=0$. الخطأ، $(U_iY_i)=0$. الخطأ، والمستقل المستقل المستقل الخطأ الخطأ المستقل الم

وبافتراض ان العلاقة المراد دراستها في نموذج الانحدار البسيط هي:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i$$
 ...(2.7)

إذ لابد ان نفسترض ان قسيمة معسامل حسد الخطساً تكسون مساوية للصفر، أي: $E(U_i)=0$ مهمسا كانت قيمة المتغير المستقل، Y_i بالنسبة لكل قيمة من قيم Y_i أي ان متوسط قيم Y_i يساوي كل قيمة من قيم المتغير المستقل Y_i التي تبدأ من القيمة الأولى، Y_i حتى آخر قيمة لها، Y_i والتي ينتج عنها $E(U_i)=0$.

ويمكن التعبير عن ذلك بالصيغة الآتية:

$$[AY_i, i = 1,2,...,n \Rightarrow E(U_i) = 0]$$
 ...(3.7)

ويعني ذلك ان متوسط العلاقة، Average Relationship، بين المتغير التابع، C_i^A ، والمستقل يمكن كتابتها كما يأتى:

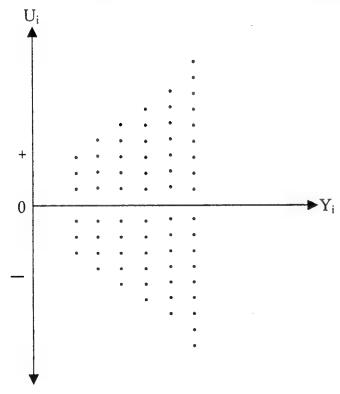
$$C_i^A = B_0 + B_1 Y_i$$
 ...(4.7)

معنى ذلك إن معامل حد الخطأ ليس له أي ارتباط بالمتغير المستقل، Y_i وبذلك يمكن كتابة العلاقة بين المتغير التابع وحد الخطأ، وكما يأتى:

$$E(U_iY_i) = 0$$

ولتوضيح ذلك، نأخذ الشكل البياني (2.7) الآتي:

الشكل (2.7): العلاقة بين معامل حد الخطأ والمتغير المستقل

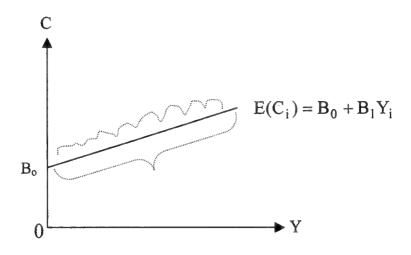


حيث يلاحظ من الشكل (2.7) ان معامل حد الخطأ، U_i يزداد بزيادة المتغير المستقل، Y_i ولكسن لا يوجد ارتباط بينهما، وذلك لان قيمة معامل حد الخطأ مساوية، في المتوسط، إلى الصفر. أي ان $E(U_i) = 0$ عن كل قيمة من قيم المتغير المستقل، V_i المتوسط، إلى الصفر. أي ان V_i الخطأ، V_i وهي أحد أهم افتر اضات نموذج الانحدار أما في حالة ثبات حد الخطأ، V_i وهي أحد أهم افتر اضات نموذج الانحدار والسذي يكون مساوياً إلى V_i المستقلة، فإنه يكون مساوياً إلى V_i المستقلة، فإنه يكون مساوياً إلى V_i المستقلة المتغير التباين، الخطأ أو تجانس التباين، المستقلة الآتية:

$$E(U_i^2) = \sigma_i^2$$
 , $(i = 1, 2, ..., n)$...(5.7)

ويمكن توضيح ذلك في الشكل البياني (3.7) الذي يوضح العلاقة بين متغيرين هما (C) متغير تبايع و (Y) متغير مستقل في حالة ثبات تباين حد الخطأ. ويلاحظ من الشكل ان تباين حد الخطأ لا يعتمد على قيم المتغير المستقل، Y.

الشكل (3.7): ثبات تباين حد الخطأ في نموذج الانحدار البسيط



3.7 أسباب عدم تجانس حد الخطأ،

:The Reasons of Heteroscedasticity

هناك أسباب عدة لظهور هذه المشكلة ومن أهمها ما يأتي:

ا سلوكية وتصرف الأفراد التي تقل الأخطاء فيها بمرور الزمن، وعليه فان تباين -1 حد الخطأ (σ_i^2) يتناقص هو الآخر خلال الفترة الزمنية.

عدد وتعدد تبایت حد الخطأ (σ_i^2) مع زیادة مستوی الدخل وذلك لتباین وتعدد –2

اختبارات الناس في سلوكهم، مثال ذلك، تباين الأنفاق على المواد الغذائية بين الأسر يمكن ان يزيد بزيادة دخل الأسرة.

 σ_i^2 مع تحسن أساليب جمع البيانات يقل تباين حد الخطأ σ_i^2 وذلك لان جمع البيانات الدقيقة والواقعية تقلل من الأخطاء، مثال ذلك ان الأخطاء التي ترد في المستندات في المؤسسات الحكومية والتي تستخدم الحاسب الآلي لتحليل البيانات تكون أقل من مثيلتها في المؤسسات التي لا تستخدم الحاسب الآلي.

4.7 اكتشاف عدم تجانس حد الخطأ، Detection of Heteroscedasticity

هناك طرق عدة يمكن بوساطتها اختبار فيما لو كان النموذج يعاني من مشكلة عدم تجانس التباين أم لا، منها:

1.4.7 اختبار كولد فيلد وكوانت، GOLDFELD and QUANDT Test:

يعد من الاختبارات المهمة لغرض الكشف عن مشكلة عدم تجانس تباين الخطأ، ويتم استخدامه في حالة العينات كبيرة الحجم، حيث يتم:

- X_i من اصغر قيمة إلى اكبر قيمة. X_i من اصغر قيمة إلى اكبر قيمة.
 - 2- حذف المشاهدات الوسطية من بيانات العينة ويفضل حذف 1/5 المشاهدات.
- -3 تقسم المشاهدات الباقية إلى عينتين جزئيتين متساويتين تنطوي الأولى على قيم X_i الصغيرة، والثانية على قيم X_i الكبيرة.
- 4- يستم تقديس معلمات العلاقة الخطية بين المتغير التابع والمتغير المستقل لكل عينة جزئية على انفراد.
- 5- يستم احتساب تبايس الخطأ للعينة الجزئية الأولى، S_i^2 ، وللعينة الجزئية الثانية، S_i^2 بموجب الصيغة الآتية:
 - أ. بالنسبة للعينة الجزئية الأولى:

$$S_i^2 1 = \frac{\sum e_i^2}{T_1 - 2} \qquad \dots (6.7)$$

حيث ان:

مجموع مربعات البواقي في العينة الجزئية الأولى. Σe_i^2

T₁: حجم العينة الجزئية الأولى.

2: ثوابت النموذج.

ب. بالنسبة للعينة الجزئية الثانية:

$$S_i^2 2 = \frac{\sum e_i^2}{T_2 - 2} \qquad \dots (7.7)$$

6- احتساب إحصاءه *F وفق الصيغة الآتية:

$$F^* = \frac{S_i^2 2}{S_i^2 1} \qquad(8.7)$$

فيذا كانت قيمة F^* المحتسبة اصغر من قيمة F^* الجدولية عند مستوى معنوية معين ودرجة حرية قدرها T_2 -2 للبسط و T_1 -2 للمقام نأخذ بفرضية العدم التي تنص على $H_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = ...\sigma_n^2$ عدم وجود المشكلة أي تجانس تباين الخطأ، حيث: F^* المحتسبة اكبر من قيمة F^* الجدولية عند نفس مستوى المعنوية ودرجسة الحرية فنأخذ بالفرضية البديلة F^* ، التي تنص على وجود المشكلة، أي عدم تجانس تباين الخطأ، أي: F^* F^*

مثال (1.7): في ضوء البيانات الإحصائية الآتية التي تبين الأنفاق الاستهلاكي (Y) و الدخل القابل للتصرف (X) في اقتصاد إحدى الدول للمدة 1983–1994.

السنة	Y	X
1983	26.1	38.3
1984	29.3	43.5
1985	35.6	53.5
1986	39.4	60.8
1987	42.7	66.4
1988	46.3	71.2

السنة	Y	X
1989	50.1	77.2
1999	54.5	86.1
1991	60.1	94.6
1982	64.9	102.4
1993	69.2	109.9
1994	73.1	115.6

المطلوب: اختبار عدم تجانس التباين باستخدام اختبار Goldfeld Quandt Test

الحسل:

البيانات الخاصة بالمتغير المستقل (X_i) مرتبة في السؤال من اصغر قيمة إلى الحبر قيمة بالصدفة، تحذف 1/5 المشاهدات ، أي $2.5 = (\frac{1}{5})(12)$ مشاهدة، حيث تحذف المشاهدتين الخاصتين بعامي 1988 و 1989 لكي تقسم البيانات إلى مجموعتين جزئيتين متساويتين تضم كلاً منها (5) مشاهدات وكالآتي:

المجموعة الجزئيسة الأولى:

السنة	Y	X	Уi	x _i	$x_i y_i$	x_i^2	Ŷ
1983	26.1	38.3	-8.52	-14.2	120.984	201.64	26.246075
1984	29.3	43.5	-5.32	-9.0	47.88	81.0	29.312583
1985	35.6	53.5	0.98	1.0	0.98	1.0	35.209713
1986	39.4	60.8	4.78	8.3	39.674	68.89	39.514618
1987	42.7	66.4	8.08	13.9	112.312	193.21	42.817011
n = 5	173.1	262.5	0	0	321.83	454.74	173.1

$$\overline{Y} = 34.62$$

$$\overline{X} = 52.5$$

e _i	e_i^2
-0.146075	0.0213379
-0.012583	0.0001583
0.390287	0.1523239
-0.114618	0.0131372
-0.117011	0.0136915
0	0.2006488

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{321.83}{545.74} = 0.589713$$

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{x}}$$

$$\hat{B}_0 = 34.62 - (0.589713)(52.5)$$

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = 34.62 - 30.5959932$$

$$\hat{B}_0 = 3.660068$$

أذن المعادلة التقديرية، هي:

$$\hat{Y} = 3.66068 + 0.589713X_i$$

$$S_1^2 = \frac{\sum e_i^2}{T_1 - 2} = \frac{0.2006488}{5 - 2} = 0.0668829$$

المجموعة الجزئيسة الثانية:

السنة	Y	X	y _i	x _i	x _i y _i	x _i ²	y_i^2
1990	54.5	86.1	-9.86	-15.62	154.0132	243.9844	97.2196
1991	60.1	94.6	-4.26	-7.12	30.3312	50.6944	18.1476
1992	64.9	102.4	0.54	0.68	0.3672	0.6424	0.2916
1993	69.2	109.9	4.84	8.18	39.5912	66.9124	23.4256
1994	73.1	115.6	8.74	13.88	121.3112	192.6544	76.3876
n = 5	321.8	508.6	0	0	354.614	554.708	215.472

$$\overline{Y} = 64.36$$

$$\overline{X} = 101.72$$

$$\hat{B}_1 = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^2} = \frac{345.614}{554.708} = 0.6230557$$

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = \overline{\mathbf{Y}} - \hat{\mathbf{B}}_1 \overline{\mathbf{x}}$$

$$\hat{B}_0 = 64.36 - (0.6230557)(101.72)$$

$$\hat{B}_0 = 64.36 - 63.377225$$

$$\hat{\mathbf{B}}_0 = 0.982775$$

أذن المعادلة التقديرية، هي:

$$\hat{\mathbf{Y}} = 0.982775 + 0.623055 \,\mathbf{X_i}$$

$$\sum \hat{y}^2 = \hat{B}_1 \sum xy = 0.6230557(345.61) = 215.33677$$
$$\sum e_i^2 = \sum y^2 - \sum \hat{y}^2$$

$$\Sigma e_i^2 = 215.472 - 215.3367 = 0.13523$$

$$S_2^2 = \frac{\sum e_i^2}{T_2 - 2} = \frac{0.13523}{5 - 2} = 0.0450766$$

$$F^* = \frac{S_2^2}{S_1^2} = \frac{0.0450766}{0.0668829} = 0.673963$$

وبمقارنة قيمة F^* المحتسبة والبالغة (0.673) مع قيمتها الجدولية البالغة (9.28) عند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (3، 3) للبسط والمقام، يتضح بأن F^* المحتسبة أقــل من F^* الجدولية، عليه تقبل فرضية العدم F^* ، والتي تنص على تجانس تباين الخطأ، أي عدم وجود المشكلة .

2.4.7 اختيار معامل ارتباط الرتب لسبيرمان،

:Spearman's Rank Correlation Coefficient Test

يُعـــد هـذا الاختبار من أسهل وأبسط الاختبارات المستخدمة في اكتشاف مشكلة عدم تجانس التباين، ويمكن تطبيقه على العينات الكبيرة والصغيرة. يعتمد هذا الاختـبار علـى القيم المطلقة لحدود الخطأ (أي إهمال إشارة، $|e_i| = e_i$) وقيم المتغير المستقل موضوع الدراسة. ويتطلب احتساب هذا المؤشر:

1- تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة OLS.

 $e_i = Y_i - \hat{Y}_i$ ، e_i احتساب البواقى، -2

 (e_i) تصاعدياً أو تتازلياً، وإعطاء (X_i) والانحرافات (e_i) تصاعدياً أو تتازلياً، وإعطاء كل منها رتباً معينة وفق تسلسل القيم ثم تحسب فروقات الرتب، ومن ثم نستخرج معامل ارتباط الرتب ما بين القيم المطلقة للانحرافات وقيم المتغير المستقل المعني

وفق قانون سبيرمان، Spearman، لارتباط الرتب الآتى:

$$r_s = 1 - \left[\frac{6 \sum D_i^2}{n(n^2 - 1)} \right]$$
(9.7)

حيث أن:

n: تمثل حجم العينة.

ورتبة $|e_i|$ الفرق ما بين رتب القيم المطلقة للانحرافات (لحد الخطأ، $|e_i|$) ورتبة المتغير المستقل، X_i ، المناظرة.

وكلما اقتربت قيمة r_s من الواحد الصحيح دل ذلك على وجود علاقة قوية بين e_i و كلما اقتربت قيمة X_i

ويمكن التأكد من وجود المشكلة من خلال اختبار t على وفق الصيغة الآتية:

$$t = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}} \qquad(10.7)$$

أ يجاد قيمة t^c الجدولية وذلك بالبحث عنها في جدول توزيع t^c في نهاية الكتاب عند درجات حرية (n-k+1) ومستوى معنوية 100 أو

إجراء مقارنة بين قيمة t^* المحسوبة مع نظريتها قيمة t^c الجدولية، فإذا كانت قيمة $t^c < t^*$ نقبل فرضية العدم، $t^c < t^*$ ، القائلة بوجود مشكلة عدم ثبات تباين حد الخطأ أو التجانس ونرفض الفرضية البديلة.

أما إذا كانت $t^c > t$ نرفض فرضية العدم، H_0 ، ونقبل الفرضية البديلة، H_1 ، القائلة بوجود ثبات مشكلة تبابن حد الخطأ.

وبشكل عام يمكن القول بأنه كلما كانت قيمة معامل ارتباط الرتب (r_s) عالية وقريبة من الواحد الصحيح، دل ذلك على وجود علاقة قوية بين انحرافات حد الخطأ والمتغير المستقل، ومن ثم يكون هناك وجود علاقة تباين حد الخطأ.

وبالرجوع إلى بسيانات المثال (1.7)، الخاص بالأنفاق الاستهلاكي (Y) والدخل القابل للتصرف في اقتصاد أحد الدول للمدة (1983-1994) وبتطبيق معامل ارتباط الرتب لسبيرمان لاختبار وجود أو عدم وجود مشكلة عدم تجانس التباين تكون:

السنة	Yi	Xi	xi	y _i	$x_i y_i$	x _i ²
1983	26.1	38.3	-38.325	-23.175	888.18187	1468.8056
1984	29.3	43.5	-33.125	-19.975	661.67187	1097.2656
1985	35.6	53.5	-23.125	-13.675	316.23437	534.76562
1986	39.4	60.8	-15.825	-9.875	156.27187	250.43062
1987	42.7	66.4	-10.225	-6.575	67.229375	104.55062
1988	46.43	71.2	-5.425	-2.975	16.139375	29.430625
1989	50.1	77.2	0.575	0.825	0.474375	0.330625
1990	54.5	86.1	9.475	5.225	49.506875	89.775625
1991	60.1	94.6	17.975	10.825	194.57937	323.10062
1992	64.9	102.4	25.775	15.625	402.73437	664.35062
1993	69.2	109.9	33.275	19.925	663.00437	1107.2256
1994	73.1	115.6	38.975	23.825	928.57937	1519.0506
	$\sum Y_i =$	$\sum X_i =$	$\sum x_i =$	$\sum y_i =$	$\sum x_i y_i =$	$\sum x_i^2 =$
n=12	591.3	919.5	0	0	4344.6067	7189.0822

			·		
Ŷ	e _i	Rank of xi	Rank of ei	$D_i = X_i - e_i$	D_i^2
26.113903	-0.013903	1	1	0	0
29.256439	0.043561	2	3	-1	1
35.299778	0.300222	3	7	-4	16
39.711416	-0.311416	4	9	-5	25
43.095685	-0.395685	5	10	-5	25
45.996488	0.303512	6	8	-2	4
49.622492	0.477508	7	11	-4	16
55.001063	-0.501063	8	12	-4	16
60.137901	-0.037901	9	2	7	49
64.851706	0.048294	10	4	6	36
69.38421	-0.18421	11	5	6	36
72.828913	0.271087	12	6	6	36
$\sum \hat{Y}_i = 591.3$	$\sum e_i = 0$				$\sum D_i^2 = 260$

$$r_{s} = 1 - \frac{6 \sum D_{i}^{2}}{n(n^{2} - 1)}$$

$$= 1 - \frac{6(260)}{12(12^{2} - 1)} = 1 - \frac{1560}{12(144 - 1)}$$

$$= 1 - \frac{1560}{1716}$$

$$= 1 - 0.9090909$$

 $= 0.0909091$

 x_i ولما كانت قيمة r_s تساوي (0.09) يدل ذلك على وجود علاقة ضعيفة بين tومن ثم عدم وجود مشكلة عدم تجانس النباين. وللتأكد من ذلك يمكن إجراء اختبار tوكالآتي:

$$t = \frac{r_s \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_s^2}}$$

$$t = \frac{0.0909091\sqrt{12 - 2}}{\sqrt{1 - (0.0909091)^2}}$$

$$t = \frac{0.0909091 (3.1622776)}{\sqrt{1 - 0.0082644}}$$

$$t = \frac{0.2874798}{0.9958592}$$

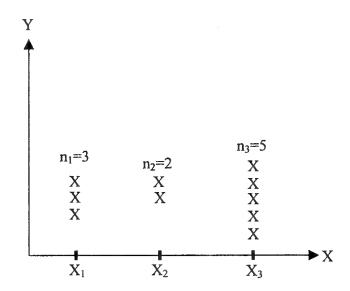
$$t = 0.2886751$$

وبمقارنة قيمة *1 المحتسبة البالغة (0.288) مع قيمتها الجدولية *1 البالغة (2.23) عــند مستوى معنوية (5%) ودرجة حرية (10)، يتضح بأن القيمة المحتسبة اقل من القــيمة الجدولية، عليه تُرفض فرضية العدم، *1، وتُقبل الفرضية البديلة، *1، التي تنص على تجانس تباين الخطأ، أي عدم وجود المشكلة.

3.4.7 اختبار بارتلیت، BARTLETT Test

يُستخدم هذا الاختبار في حالة توفر اكثر من مشاهدة لكل قيمة من قيم المتغير المستقل (X) كما مبين في الشكل 4.7:

الشكل 4.7: اختبار بارتليت



يتضح من الشكل السابق بان المتغير المستقل، X_i أخذ ثلاث مستويات و هناك مشاهدات عديدة لكل مستوى، فمثلاً هناك 3 مشاهدات عند المستوى X_i ومشاهدات عند المستوى X_i ومشاهدات عند المستوى X_i فلو رمزنا لعدد المشاهدات عند كل مستوى من المستويات (i) بالرمز (n_i) ، حيث (i=1,2,...,m) ومنه يكون المجموع الكلي لمشاهدات العينة مساوياً إلى $\sum_{i=1}^{m} n_i = N$ عليه يمكن إعادة صياغة النموذج الخطى البسيط وبدون إحداث أي تغير في الجوهر على النحو الآتى:

$$Y_{ij} = B_0 + B_1 X_{ij} + U_{ij}$$
(11.7)

حيث $(j=1,2,...,n_i)$ وهي عبارة عن رقم المشاهدة عند مستوى معين من مستويات المتغير المستقل X_i عند المستوى X_i تكون (j=1,2,3) أي $(n_1=3)$.

ومحتوى اختبار بارتليت هو تجزئة العينة المدروسة إلى عدد من العينات الجزئية (S_i^2) , ومن ثم احتساب تباين الخطأ لكل عينة جزئية (S_i^2) , بمستوى معنوية معين ودرجة حرية (n_i) المتأكد من احتمالية انسحاب هذه العينات الجزئية من مجتمع معين، فإذا قبلت فرضية العدم الآتية:

$$H_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2=...=\sigma_n^2$$

أي:

$$H_0: \sigma_i^2 = \sigma^2$$

دلَّ ذلك إن العينات مسحوبة من مجتمع واحد (متجانس)، أي ان تباين الخطأ ثابت. وبالعكس في حالة قبول الفرضية البديلة:

$$H_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq ... \neq \sigma_n^2$$

أو:

$$H_1:\sigma_i^2\neq\sigma^2$$

أي ان تباين الخطأ غير ثابت.

و لإجراء اختبار بارتليت، نتبع الخطوات الأساسية الآتية:

- احتساب Q/L، حیث ان:

$$Q = N \log \left(\frac{\sum_{i=1}^{m} n_{i} S_{i}^{2}}{N} \right) - \sum_{i=1}^{m} n_{i} \log S_{i}^{2} \qquad(12.7)$$

$$L = 1 + \frac{1}{3(m-1)} \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n_i} - \frac{1}{n} \right) \qquad \dots (13.7)$$

حيث إن:

$$S_i^2 = \frac{1}{n_i} \sum_{i=1}^{n_i} (Y_{ij} - \overline{Y}_i)^2 \qquad(14.7)$$

$$\overline{Y}_{i} = \frac{1}{n_{i}} \sum_{i=1}^{n_{i}} Y_{ij}$$
(15.7)

والمقدر Q/L يستوزع بصورة مقاربة إلى توزيع Q/L (Chi-Square) بدرجة حرية (m-1) ومستوى معنوية معين. فإذا كانت:

$$Q/L \le \chi_{m-1}^2$$

تقبل فرضية العدم، أي أن تباين الخطأ المحسوب من العينات الجزئية ثابت (متساوي).

أما إذا كانت:

$$Q/L \ge \chi_{m-1}^2$$

فيق بل الفرض البديل، أي ان تباين الخطأ المحسوب من العينات الصغيرة غير متجانس، أي وجود مشكلة عدم تجانس التباين.

4.4.7 طريقة كليجس ، GLEJSER Method

يع تمد هذا الاختبار على شكل العلاقة بين الانحرافات العشوائية والمتغير المستقل الذي تعتمد عليه تلك الانحرافات، حيث يتم:

- 1- تقدير معلمات العلاقة الخطية ومن ثم أيجاد قيم الانحرافات الناتجة من الفرق بين القيم الحقيقية والتقديرية للمتغير التابع.
- -2 أخذ القيمة المطلقة للبواقي، $|e_i|$ ، كمتغير تابع في الانحدار، حيث يكون المتغير المستقل هو X_i الذي نعتقد بارتباطه مع σ_i^2 ، ومن الأمثلة على مثل هذه الصيغ:

$$|\mathbf{e}_{\mathbf{i}}| = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{X}_{\mathbf{i}}$$

$$|e_i| = B_0 + B_1 \sqrt{X_i}$$

 $|e_i| = B_0 + B_1 / X_i$

 B_0 الناحية الإحصائية. فإذا أعطت إحدى الصيغ أعلاه قيماً جوهرية المعلمات الانحدار عندئذ يجب تحويل متغيرات المنموذج وفقاً للصيغة المذكورة. بعبارة أخرى، يمكن عن طريقها تحديد صيغة العلاقة بين الأخطاء العشوائية و المتغير المستقل.

5.4.7 اختبار بارك، PARK Test

للكشف عن مشكلة تباين الخطأ نستخدم اختبار بارك كما يلي: بافتراض ان نموذج الانحدار البسيط المراد تقديره في عملية الاختبار هو:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i$$
 , $(i = 1, 2, ..., n)$...(16.7)

وان:

n: تمثل عدد المشاهدات.

: C_i تمثل القيمة الفعلية للأنفاق الاستهلاكي.

Yi : تمثل القيمة الفعلية لمستوى الدخل.

 B_1 ، B_0 تمثل معلمات النموذج المراد تقديره.

والاستخدام اختبار بارك في اكتشاف مشكلة تباين حد الخطأ نتبع ما يأتي:

- تطبيق طريقة OLS لتقدير معاملات النموذج، ونحصل على:

$$\hat{C}_{i} = \hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}Y_{i} + e_{i} \qquad ... (17.7)$$

- للحصول على القيم المقدرة لحد الخطأ، ei، من المعادلة أعلاه، كما يأتى:

$$e_i = C_i - \hat{C}_i$$
 ...(18.7)

ا نحصل على: الطبيق طريقة OLS انحصل على: OLS الطبيق طريقة $\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \ln Y_i$ المحدار $\hat{b}_0 + \hat{b}_1 \ln Y_i$ المحداد الم

- تحسب قيمة *t المحتسبة بالنسبة للمعامل b وكما يأتى:

$$t_{\hat{b}}^* = \frac{\hat{b}}{\operatorname{se}\hat{b}} \qquad \dots (20.7)$$

حبث ان:

$$se\hat{b} = \sqrt{var\,\hat{b}}$$

وان:

$$\operatorname{var} \hat{\mathbf{b}} = \frac{\hat{\sigma}^2}{\sum Y_i^2}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum e_i^2}{n-2}$$

وان انحرافات yi عن الوسط الحسابي هي:

$$y_i = y_i - \overline{Y}$$

وان درجات الحرية، (df = n - k + 1).

- نجـــد قیمــة t^c الجدولیة ثم نقارنها مع نظریتها t^c المحسوبة عند درجات حریة (n-k+1).

 $b \neq 0$ نرفض فرضية العدم ونقبل الفرض البديل القائل ان $t^c < t^*$ ويقال عندئذ إن قيمة المعامل b يكون معنوي إحصائياً. ويدل ذلك على وجود مشكلة تباين حد الخطأ، والعكس إذا كانت $t^c > t^*$ عدم وجود مشكلة تباين حد الخطأ.

5.7 معالجة مشكلة عدم تجانس التباين:

كما بينًا سابقاً إن خرق فرضية ثبات التباين لحدود الخطأ يؤدي إلى وجود قيم مختلفة وغير ثابتة لتباينات حدود الخطأ العشوائية، ومن ثم فان القطر الرئيس لمصفوفة التباين والتباين المشترك الخاصة بحدود الخطأ يحتوي على قيم مختلفة وغير ثابتة، أي ان:

$$E(U_iU_j) \neq \sigma^2 In$$

حيث ان:

$$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2 \neq ... \neq \sigma_n^2$$

وتتمثل معالجة مشكلة عدم تجانس التباین في المجتمعات الفرعیة بتحدید الأوزان ومن ثـم استخدام هذه الأوزان في تحویل صیغة النموذج إلى صیغة أخرى ینتج عنها قیم متساویة في قطر المصفوفة σ^2 In ولتحقیق هذا الفرض توجد طرق مختلفة منها: \overline{X} عندما یزداد تباین المتغیر التابع، Y، بشــــکل تناسبي مع قیمة الوسط الحسابي، \overline{X} فإنه یمکن تحویل المتغیر ات التي تعاني من مشكلة عدم تجانس التباین من خلال قسمة فإنه یمکن تحویل المتغیر ات التي تعاني $Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$ وكما في طرفــي المعادلــة X_i ، وكما في

الصيغة الآتية:

$$\frac{Y_i}{X_i} = \frac{B_0}{X_i} + B_1 \frac{X_i}{X_i} + \frac{U_i}{X_i}$$

مع ملاحظة إن الحد الثابت في المعادلة الرئيسة B_0 أصبح يمثل معامل الانحدار، أي B_1 وان B_1 أصبح يمثل الثابت، مما يجعل معامل التحديد B_1 مختلف في المعادلتين، لاختلاف قيم المتغير التابع، Y_i في الأولى و $\frac{Y_i}{X}$ في الثانية:

 X_i عـندما يـزداد تبايـن المتغير التابع، Y_i ، بشكل تناسبي مع الزيادة في X_i فتتم عملية التحويل بقسمة طرفي معادلة الانحدار على X_i ، أي:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_i + U_i$$

$$\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}} = \frac{B_0}{\sqrt{X_i}} + B_1 \frac{X_i}{\sqrt{X_i}} + \frac{e_i}{\sqrt{X_i}}$$

هنا العلاقة بين المتغيرين X_i و Y_i اصبح علاقة بين ثلاث متغيرات $\frac{Y_i}{\sqrt{X_i}}$ ، $\frac{1}{\sqrt{X_i}}$

ما يجعل تقدير القيمة الثابت بعد التحويل تصبح صفر، كما وان قيمة \mathbb{R}^2 تصبح اكبر، مما يجعل تقدير القيمة المتوقعة للمتغير التابع، \mathbb{Y} ، غير دقيقة.

الأسئلة والتمــــارين

السوال 1.7: يعطي الجدول الآتي بيانيات كل من e_i ، X_i و المطلوب استخدام معامل ارتباط الرتب السيبيرمان في اكتشاف مشكلة عدم تجانس التباين علماً ان $t_{5\%}=0.549$.

e _i	X _i	التسلسل
1.017	12.4	1
1.260	14.4	2
0.181	14.6	3
0.202	16.0	4
0.221	11.3	5
0.602	10.0	6
0.908	16.2	7
0.110	10.4	8
0.077	13.1	9
0.038	11.3	10

السؤال 2.7: إذا أعطيت الصيغة التقديرية الآتية:

$$\hat{Y}_i = 5.25 - 0.42 X_i$$

علماً بأن كل من Xi ، Yi أخذت المشاهدات الآتية:

X _i	Y _I	التسلسل
1	6	1
1	4	2
2	3	3
3	5	4
2	4	5
4	5	6
5	3	7
6	2	8

احسب معامل سبيرمان لارتباط الرتب.

السؤال 3.7: باستخدام عينة عشوائية مكونة من (12) عائلة توصل باحث اقتصادي السؤال 3.7: باستخدام عينة عشوائية مكونة من (12) عائلة توصل باحث اقتصادي السؤال Y والادخار S بآلاف الدنانير.

الادخار، S	الدخل، Y	التسلسل
2.6	30.5	1
2.2	26.0	2
1.5	18.0	3
4.0	42.5	4
2.7	30.0	5
2.9	28.0	6
2.6	27.5	7
3.0	32.5	8
3.2	35.0	9
2.7	26.0	10
2.2	27.5	11
3.4	39.0	12

المطلوب:

- قدر دالة الادخار للعينة.
- استعمل اختبار كولد فيلد وكوانت للتحقق من وجود مشكلة عدم تجانس النباين.

الفصل الثامن: نماذج المعادلات الآنيسة Simultaneous Equations Models

- 1.8 طبيعة المعادلات الآنية.
 - 2.8 مشكلة التحيز الآني.
- 3.8 نماذج المعادلات الآنية في النظرية الاقتصادية.
 - 1.3.8 نموذج العرض والطلب.
- 2.3.8 النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي.
 - 3.3.8 نموذج فيلبس الأجر النقدي-السعر.
 - 4.8 الشكل المختزل.
 - 5.8 تقدير نموذج المعادلات الآنية.
- 1.5.8 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، ILS.
 - 2.5.8 طريقة المتغيرات المساعدة، IV.
- 3.5.8 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين، TSLS.
 - 6.8 الأسطلة والتماريسن.

الفصل الثامين: نماذج المعادلات الآنيية Simultaneous Equations Models

1.8 طبيعة المعادلات الآنية:

كان التركيز فيما تقدم من الفصول على نماذج المعادلة المنفردة، والذي يفترض بأن هناك اتجاهاً وحيداً للسببية بين متغير أو متغيرات مستقلة إلى متغير تسابع، ولكن هذه العلاقة السببية لا تكون كذلك دائماً، فقد تكون باتجاهين من المتغير المستقل (أو المتغيرات المستقلة) إلى المتغير التابع، وكذلك من المتغير التابع إلى المتغير أو المتغيرات المستقلة. وهذا التأثير المتبادل يجعل الفرض الذي يتعلق باستقلال المتغير العشوائي عن المتغير المستقل غير صحيح، أي ان:

 $E(X_i U_i) \neq 0$

ومن ثم فإن مقدر ات OLS ستكون متحيزة وغير متسقة.

ان وجود تأثير ذو اتجاهين في الدالة يعني بحد ذاته ضرورة وجود معادلتين أو مجموعة من المعادلات لوصف العلاقة بين متغيرين، فالمتغير التابع في معادلة أولى قد يوجد ضمن مجموعة المتغيرات المستقلة في معادلة ثانية. وعند ذلك يؤدي دورا مسزدوجاً إذ يكون هو الأثر (تابع) في المعادلة الأولى والمؤثر (مستقل) في المعادلة الثانية. ان هذا النظام في وصف التأثير المتبادل بين المتغيرات يسمى بنظام المعادلات الآنية، Simultaneous Equations System.

وبشكل عام يمكن تعريف منظومة المعادلات الآنية بأنها عبارة عن مجموعة معادلات يكون فيها المتغير التابع لواحد أو اكثر من معادلاتها متغيراً مستقلاً في معادلة او اكثر ضمن تلك المجموعة. وإن المتغيرات التابعة في تلك المجموعة من المعادلات تسمى بالمتغيرات الداخلية، Endogenous variables، حيث يقابل كل متغير داخلي في المنظومة معادلة واحدة وبهذا فإن عدد المعادلات في منظومة المعادلات الآنية ينبغي أن يساوي عدد المتغيرات الداخلية. أما المتغيرات الخارجية، Exogenous عدمان عددها يكون غير محدداً، إذ لا توجد قيود تحدد عدد هذه المتغيرات وإنما يتوقف ذلك على طبيعة العلاقة بين مختلف معادلات المنظومة، وكمثال على موذج آنى مبسط نأخذ النموذج الكينزي لتحديد الدخل القومي وكما يلى:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t$$
 ...(1.8)

$$\mathbf{Y}_{\mathsf{t}} = \mathbf{C}_{\mathsf{t}} + \mathbf{I}_{\mathsf{t}} \qquad \dots (2.8)$$

حيث ان:

· C، تمثل الأنفاق الاستهلكي في الفترة الزمنية · C،

Y: تمثل الدخل في الفترة الزمنية Y:

. I_t : تمثل الاستثمار في الفترة الزمنية I_t

: B₀, B₁ تمثل معالم دالة الاستهلاك.

: U1 المتغير العشوائي.

وإذا ما نظرنا إلى النموذج السابق نجد ان الاستهلاك، C_t ، والدخل، Y_t ، في المعادلة الأولى متغيران داخليان ويحدد أحدهما الآخر، أما المعادلة الثانية فهي معادلة تعريفية

أو متطابقة الدخل القومي، ولا تتضمن أي متغيرات عشوائية كما لا تتضمن معلمات مجهولة وان It الاستثمار هو متغير خارجي يجري تحديده من خارج النموذج. ومن ناحسية أخسرى فأن المعادلة الأولى من النموذج هي التي تمثل دالة الاستهلاك وهي معادلة سلوكية او هيكلية تصف سلوك المستهلك، إذ توضح اعتماد Y, على Y وان ميل المعادلة هو B₁ الذي يمثل الميل الحدى للاستهلاك ويكون موجب وذلك بسبب العلاقسة الطردية بين الأنفاق الاستهلاكي كمتغير تابع ومستوى الدخل كمتغير مستقل أي إذا زاد الدخل يترتب عليه زيادة في الاستهلاك ولكن ليست كل الزيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك بل يذهب جزء منها إلى الادخار وان Ui تمثل بقية العوامل التي تؤشر على الاستهلاك وغير داخلة في النموذج كأسعار الفائدة وتوزيع الدخل،...الخ. ومن ثم فان التغير في أي من هذه العوامل سوف يترتب عليها تغير في المتغير العشوائي، ¿U، ومن ثم انتقال دالة الاستهلاك وتغير مستوى الدخل، ¡Y، وبذلك بكون هــناك ارتـــباط بيــن المتغير المستقل، Y، والمتغير العشوائي، Ui، وعليه لا يمكن استخدام طريقة OLS في حل النموذج، فإذا طبقت طريقة OLS العادية على كل معادلة من المعادلات الآنية أعلاه برغم انتفاء الشروط اللازمة لتطبيقها فإن ذلك سيقود إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة ويشار إلى ذلك بتحيز المعادلات الآنية. ويمكن توضيح ذلك في الفقرة الآتية.

2.8 مشكلة التحيز الآنى:

لبيان مشكلة التحيز الآني في نموذج تحديد الدخل الكينزي السابق فإننا نشتق الصورة المختزلة للنموذج وعلى النحو الآتى:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t$$
 ...(1.8)

$$Y_t = C_t + I_t \qquad \dots (2.8)$$

وبالتعويض عن قيمة C_t بما يساويها في المعادلة (1.8) من المنظومة أعلاه فأن:

$$Y_t = (B_0 + B_1 Y_t + U_t) + I_t$$
 ...(3.8)

وبإعادة ترتيب الحدود:

$$Y_t - B_1 Y_t = B_0 + I_t + U_t$$
 ...(4.8)

$$Y_t(1-B_1) = B_0 + I_t + U_t$$
 ...(5.8)

$$\therefore Y_{t} = \frac{B_{0}}{1 - B_{1}} + \frac{I_{t}}{1 - B_{1}} + \frac{U_{t}}{1 - B_{1}} \qquad \dots (6.8)$$

يتبين من الصيغة (6.8) ان الدخل، ،Y، دالة في عنصر الخطأ لدالة الاستهلاك، أي ان:

$$Cov = (Y_t \ U_t) \neq 0$$

وذلك لأن:

Cov =
$$(Y_t U_t) = E[Y_t - E(Y_t)][U_t - E(U_t)]$$

291

ويما أن:

$$E(U_t) = 0$$

فإن:

$$Cov(Y_t U_t) = E[[Y_t - E(Y_t)] U_t]$$

وبالتعويض عن توقع ٢٠:

$$Cov(Y_t U_t) = E \left[Y_t - E \left(\frac{B_0}{1 - B_1} + \frac{I_t}{1 - B_1} + \frac{U_t}{1 - B_1} \right) \right] [U_t]$$

وبالتعويض عن ٢٠:

$$Cov(Y_t \ U_t) = E\left[\left(\frac{B_0}{1 - B_1} + \frac{I_t}{1 - B_1} + \frac{U_t}{1 - B_1}\right) - \left(\frac{B_0}{1 - B_1} + \frac{I_t}{1 - B_1}\right)\right] [U_t]$$

وبعد الاختصار والترتيب، نحصل:

$$Cov(Y_t U_t) = E \left[\frac{1}{1 - B_1} U_t . U_t \right]$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة، بعد النرتيب، كما يلي:

$$Cov(Y_t U_t) = \left(\frac{1}{1 - B_1}\right) E(U_t^2)$$

$$Cov(Y_t | U_t) = \frac{1}{1 - B_1} \sigma^2 U \neq 0$$

ويناقض ذلك الفرض الخاص بـ OLS والذي يؤكد على عدم ارتباط المتغيرات المستقلة مع العنصر العشوائي. فالمتغير الداخلي ٢٠ يؤدي دور المتغير المستقل في معادلة الاستهلاك الهيكلية إلا انه يرتبط بالعنصر العشوائي ٤٠٠. حيث يترتب عند تطبيق OLS على تلك المعادلة الحصول على مقدرات متحيزة وغير متسقة.

لذا يستوجب اللجوء إلى طرق أخرى أهمها:

- طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة، (Indirect Least Squares (ILS).
 - طريقة المتغير الاداتي، (Instrument Variable (IV).
 - طريقة الإمكان الأعظم، Maximum Likelihood Method.
- طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (Two Stage Least Squares (2SLS). وسيتم الستطرق السي بعض هذه الطرق في مبحث لاحق بعد دراسة نماذج

المعادلات الآنية في النظرية الاقتصادية.

3.8 نماذج المعادلات الآنية في النظرية الاقتصادية:

1.3.8 نموذج العرض والطلب، Supply and Demand Model

يتكون نموذج الطلب والعرض على سلعة ما من المعادلات الآتية:

$$Q_d = B_o + B_1 P + U_1$$

$$, (B_1 < 0)$$

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P_1 + U_2 \qquad , \quad (\alpha_1 > 0)$$

$$(\alpha_1 > 0)$$

وعند التوازن تتساوى الكمية المطلوبة والمعروضة $Q_{\rm s}$ و $Q_{\rm s}$ من تلك السلعة في السوق حيث ان:

$$Q_d = Q_s$$

عندما:

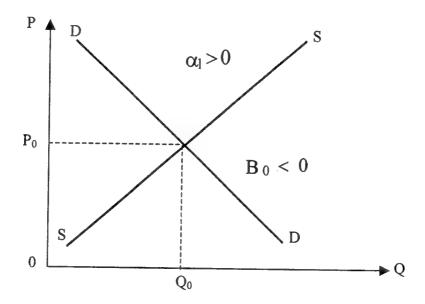
P: تمثل سعر تلك السلعة.

لتوالى. المتغير العشوائي لدالة الطلب والعرض على التوالى. U_2, U_1

. تمثل معلمات النموذج: $B_1, B_0, \alpha_1, \alpha_0$

أما التمثيل البياني للنموذج فهو كما في بالشكل (1.8).

شكل (1.8): نموذج توازن السوق

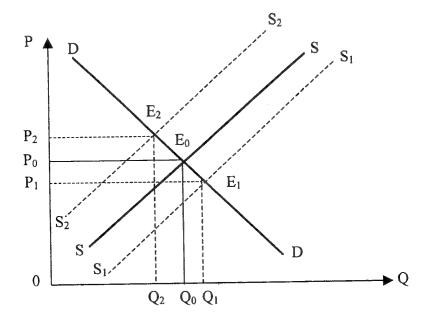


ومن الشكل السابق يمكن ملاحظة ما يأتي:

- أن SS يمـنل منحني العرض و DD يمثل منحني الطلب و Po و Qo يمثلان السعر والكمـية التوازنية في السوق على التوالي. وان كلا المنحنيين يأخذان شكل خط مستقيم أي بمعنى ان النموذج خطى.
 - أن جميع متغيرات النموذج هي متغيرات داخلية، وذلك لأن الكمية المطلوبة والمعروضة تتحدد بالسعر في حالة تقاطع المنحنيين في السوق، ولكن هناك

بعض الآثار لتغيرات كل من ظروف العرض والطلب على تحديد توازن السوق. ويمكن تلخيصها بالشكل البياني (2.8).

شكل (2.8): تغير ظروف العرض مع ثبات الطلب



ف إذا بدأنا من الوضع التوازني في السوق، فما هو أثر تغيرات ظروف العرض على توازن السوق مع افتراض ثبات منحنى الطلب؟

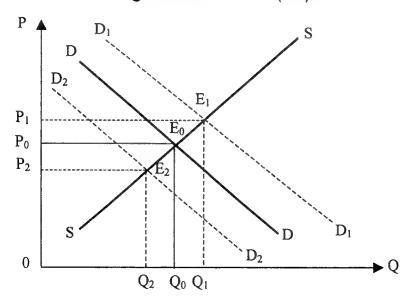
يلاحظ من الشكل (2.8) ان حدوث تغير في ظروف العرض مع ثبات ظروف الطلب ناتج من تغير أحد العوامل، التي افترضتها النظرية الاقتصادية ثابتة، مع تغير السبعر، وهذه العوامل هي تغير المستوى الفني وتكاليف الإنتاج والقيود المفروضة على الواردات،...الخ. ويترتب على تغير هذه العوامل انتقال لكامل منحنى العرض الى اليمين او إلى اليسار في حالة الزيادة والنقصان على التوالي. فعند تحسن المستوى

الفني للإنتاج سوف يؤدي إلى انتقال منحنى العرض إلى جهة اليمين وانتقال نقطة السعر الستوازن من النقطة ((E_0)) إلى نقطة توازن جديدة هي ((E_1)) نتيجة انخفاض السعر التوازنسي من (E_1) 0 إلى حيث يترتب عليها زيادة في الكميات التوازنية من تلك السلعة في السوق. أما في حالة رداءة المستوى الفني المستخدم ينتقل منحنى العرض إلى الأعلى مسبباً انخفاض في الكميات التوازنية وزيادة في السعر التوازني مع انتقال نقطة التوازن إلى ((E_1) 0 وبالتالي سوف يسقط الافتراض القائل بعدم وجود علاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغير العشوائي ومن ثم لا يمكن استخدام طريقة المربعات الصغرى العادية في تقدير المعادلة ((E_1) 8.8).

وبطريقة مماثلة، فإن التغير في (U_i) يؤدي إلى حدوث تغير في المتغيرات الأخرى التي تؤثر على الكمية المطلوبة التي لم تدخل في نموذج الطلب مثل دخل المستهلك، وذوقه، وأسعار السلع الأخرى (البديلة أو المكملة)، ومن ثم فإن التغير في أي من العوامل أعلاه سوف يترتب عليه تغير في المتغير العشوائي (U_i) وبالتالي النيان أو إلى اليسار بالزيادة والنقصان مسبباً تغيراً في السعر والكمية التوازنية.

ومن ناحية أخرى ما هو اثر تغيرات ظروف الطلب على توازن السوق مع بقاء العرض ثابتاً. للجواب على ذلك يمكن الاستعانة بالشكل البياني (3.8) وكما يأتي:

شكل (3.8): تغير ظروف الطلب مع ثبات العرض



فإذا ازداد الدخل النقدي للمستهك، على سبيل المثال، سيترتب على ذلك انتقال منحنى الطلب إلى جهة اليمين من (D1 إلى (D1 الى (D1 الى وانتقال نقطة التوازن من (E0) إلى (E1). حيث يتبع ذلك زيادة الكمية التوازنية إلى (Q1) وانتقال السعر التوازني إلى (P1). ويترتب على ذلك بأن (U1) سوف تكون موجبة أي ان (0 $(U_i > 0)$)، والعكس يحصل إذا انخفض دخل المستهلك، لان منحنى الطلب سوف ينتقل إلى جهة اليسار مسن (D2 إلى (D2 والكمية التوازنية إلى (Q2)). ويترتب عليه ان يكون المتغير العشوائي سالب، أي ان ($(U_i < 0)$) ، وبذلك لا يمكن تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) في تقدير معادلة الطلب (7.8).

من المثال أعلاه، يمكن ملحظة ان هناك علاقة معتمدة تداخلية بين (P) و (P) من ناحية، وبين المتغير العشوائي (U_i) والسعر (P) من ناحية ثانية، وبين (U_2) فان أحد افتر اضات الانحدار الخطي سوف تسقط، ويتمثل هذا الافتر اض بعدم وجود ارتباط بين المتغير المستقل والمتغير العشوائي.

2.3.8 النموذج الكينزى لتحديد الدخل القومي:

باستخدام الصيغة البسيطة لكينز في تحديد مستوى الدخل القومي، وذلك بأخذ دالة الاستهلاك والدخل القومي كما يأتي:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i$$
 ... (10.8)
 $Y_i = C_i + I_i + G_i$... (11.8)

$$0 < B_1 < 1,$$
 (i = 1,2,...,n) : حیث ان

وان:

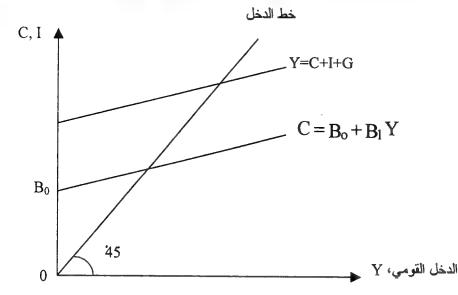
G: تمثل الأنفاق الكلى

U: تمثل المتغير العشوائي

B₀ و B₁: تمثل معاملات النموذج

ويجب ملاحظة ان المعادلة (11.8) فيها متغيرين خارجيين ومتغيرين داخليين في نظام المعادلات الآنية، الذي يمكن وصفة بشكل بياني كما في الشكل (4.8).

شكل (4.8): نموذج كينز في تحديد الدخل القومي



حيث يلاحظ من الشكل أعلاه، ان ميل المعادلة (10.8) هو B_1 ويمثل الميل الحدي للاستهلاك (Marginal Propensity to Consume (MPC)، أو ميل دالة الاستهلاك ويكون موجب، أي أن ($B_1>0$) وذلك بسبب العلاقة الطردية بين الأنفاق الاستهلاكي كمتغير تابع ومستوى الدخل كمتغير مستقل، أي إذا زاد مستوى الدخل يترتب عليه زيادة في الدخل تذهب إلى الاستهلاك، بل

يذهب جزء منها إلى الادخار، وحسب النظرية الاقتصادية فقد تتراوح قيمة الميل الحدي للاستهلاك أو ميل دالة الاستهلاك بين الصفر والواحد الصحيح، أي ان: $0 < B_1 < 1$

وتمــثل المعادلــة (11.8) مــتطابقة الدخــل القومي والتي تمثل مجموع الاستهلاك والاستثمار والأنفاق الحكومي، وان خط (45) يُمثل خط الدخل أي العرض الكلي. أما المتغير العشوائي (U_i) يمثل بقية العوامل التي تؤثر على الاستهلاك وغير داخلة في السنموذج، كالتنــبؤ بالأسـعار المسـتقبلية وأسـعار الفــائدة وتوزيع واعادة توزيع الدخل،...الخ. ومن ثم فان التغير في أي من هذه العوامل سوف يترتب عليها تغير في المتغير العشــوائي (U_i) ومن ثم يترتب عليه انتقال دالة الاستهلاك بالكامل وبذلك يتغــير مسـتوى الدخــل (Y_i) وبذلك يكون هناك ارتباط بين المتغير المستقل (Y_i) ولهذا السبب لا يمكن استخدام طريقة (OLS) في حل هذا الــنموذج وتقديــر معاملاتــه (B_0)، ولكن يمكن تحديد مستوى الدخل التوازني باستخدام حل نموذج المعادلات الآنية للمعادلتين (10.8) و (11.8).

3.3.8 نموذج الأجر النقدي-السعر، Wage-Price Model (نموذج فيلبس): بافتراض ان لدينا نموذج فيلبس الذي يربط الأجر النقدي والأسعار باستخدام المعادلات الآتية:

$$W_{i} = B_{0} + B_{1}Un_{i} + B_{2}\overline{P}_{1} + U_{1} \qquad ...(12.8)$$

$$P_i = \alpha_0 + \alpha_1 \overline{W}_i + \alpha_2 \overline{R}_i + \alpha_3 \overline{M}_i + U_2$$
 ...(13.8)
 $(i=1, 2, 3, ..., s)$

حيث ان:

 \overline{W} = معدل التغير في الأجور النقدية _____ متغيرات داخلية في النموذج \overline{P} = معــــدل التغيــــر في الأسعار___

— R = معدل التغير في مكننة رأس المال.

 \overline{M} = معدل التغير في سعر المواد الأولية المستوردة.

i = عنصر الزمن (n,..., 2, 1)،

Un = معدل البطالة

 U_{2} = المتغيرات العشوائية أو حدود الخطأ.

معاملات النموذج. B_{is} , α_{is}

من المعادلة (12.8) يتبين ان (W) متغير تابع وان (P) متغير مستقل، وعلى العكس من ذلك فأن (P) متغير تابع و (W) متغير مستقل في المعادلة (13.8). لذلك فأن

المتغير العشوائي (U_1) و (U_2) . المتغير العشوائي (U_1) و (U_2) . ومن ثم يصعب استخدام طريقة (OLS) لتقدير معاملات النموذج.

مما سبق يلاحظ ان النماذج التطبيقية المدروسة أعلاه، لا يمكن استخدام طريقة (OLS) لتقدير معاملاتها وذلك لوجود علاقة بين المتغيرات المستقلة والمتغيرات العشوائية فيها. ولكن هناك عدة طرق قد طورت في استخدام وحل نماذج المعادلات الآنية لتقدير معاملات تلك النماذج، وقد تم الإشارة إلى تلك الطرق أعلاه والتي سنبحثها لاحقاً في هذا الفصل.

Reduced Form الشكل المختزل، 4.8

يطلق الشكل المختزل على المعادلات التي تشتق من حل الشكل الهيكلي للنموذج، ويلاحظ ان معادلات الشكل المختزل تجعل كل متغير داخلي على حدة دالة في جميع المتغيرات المحددة سابقاً، Predetermined، للنموذج.

ان هــيكل النموذج يمثل مجموعة من المعادلات كل واحدة تصف نوع واحد مــن السلوك الاقتصادي المشابه للتعريف. وبافتراض أننا لدينا المعادلات الآتية والتي تمثل هيكل النموذج.

$$Q_d = B_0 + B_1 W_i + U_i$$
(14.8)

$$Q_{s} = \alpha_{0} + \alpha_{1} W_{i} + \alpha_{2} O_{i} + \alpha_{3} N_{i} + V_{i} \qquad ...(15.8)$$

فأن الشكل المختزل للنموذج يمكن الحصول عليه وكما يلي:

ومن خلال شرط التوازن للمعادلتين (14.8) و (15.8) واعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$W_{1} = \frac{\alpha_{0} - B_{0}}{B_{1} - \alpha_{1}} + \frac{\alpha_{2}}{B_{1} - \alpha_{1}} O_{i} + \frac{\alpha_{3}}{B_{1} - \alpha_{1}} N_{i} + \frac{V_{i} - U_{i}}{B_{1} - \alpha_{1}} ...(16.8)$$

وبتعويض هذه المعادلة في المعادلة (15.8)، نحصل على:

...(19.8)

$$Q = \frac{\alpha_0 B_1 - \alpha_1 B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2 B_1}{B_1 - \alpha_1} O_i + \frac{\alpha_3 B_1}{B_1 - \alpha_1} N_i + \frac{B_1 V_i - \alpha_1 U_i}{B_1 - \alpha_1} ... (17.8)$$

الآتية: (18.8)

بعد إعادة الترتيب والتبسيط الرياضي لهاتين المعادلتين، يمكن إعادة كتابتهما بالصيغة

$$W_{i} = \pi_{1} + \pi_{2} O_{i} + \pi_{3} N_{i} + e_{1i} \qquad ...(18.8)$$

حيــث ان: e,π يمثلان الحدود المحصورة في الأقواس للمعادلتين (16.8) و(17.8) بالتماثل، وان المعاملات π تكون توليفاتها كما يلى:

$$\pi_1 = \frac{\alpha_0 - B_0}{B_1 - \alpha_1}$$
 , $\pi_2 = \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}$

 $H = \pi_4 + \pi_5 O_i + \pi_6 N_i + e_{2i}$

$$\pi_3 = \frac{\alpha_3}{B_1 - \alpha_1}$$
 , $\pi_4 = \frac{\alpha_0 B_1 - \alpha_1 B_0}{B_1 - \alpha_1}$

$$\pi_5 = \frac{\alpha_2 B_1}{B_1 - \alpha_1}$$
 , $\pi_6 = \frac{\alpha_3 B_1}{B_1 - \alpha_1}$...(20.8)

وهنا يجب ملاحظة أننا نحصل على قيمتين للمعامل B1، أي ان:

$$B_1 = \frac{\pi_5}{\pi_2}$$
 Or $B_1 = \frac{\pi_6}{\pi_3}$...(21.8)

وهذه ليست بالضرورة ان تكون متساوية، ولكل واحدة منها نحصل على تقدير للمعامل B_0 من خلال:

$$B_0 = \pi_1 - B_1 \pi_4 \qquad ...(22.8)$$

ومن ناحية أخرى لا نستطيع الحصول على تقدير لمعلمات دالة العرض (15.8) عبر α_0 و α_0 و α_0 و α_0 و هنا يمكن القول ان دالة الطلب (14.8) يكون لها تشخيص على ودالة العرض لها تشخيص سفلي. وعندما نحصل على تقدير واحد لمعلمات المعادلة، يمكن القول بان المعادلة مشخصة تماماً. وعند الحصول على تقديرات متعددة، يقال ان المعادلة لها تشخيص علوي، وعندما لا نحصل على تقديرات يقال ان المعادلة لها تشخيص سفلى.

في جميع الحالات نتحدث عن الحصول على تقديرات للمعادلات الهيكلية من خلال تقدير المعلمات لمعادلات الشكل المختزل.

وعند مناقشة التشخيص أعلاه للحصول على حلول المعلمات للمعادلات الهيكلية من معاملات المعادلات للشكل المختزل. وفي تحليل النماذج القياسية

المعادلات الآنية، فان الحلول في المعادلات (16.8) و (17.8) أو الصيغ المبسطة (18.8) و (19.8) تسمى بالشكل المختزل لهيكل النموذج الأصلي في المعادلتين (14.8) و (15.8) وان كل معادلة من معادلات الشكل المختزل تحدد بدقة كيف يكون لقيمة المتغير الداخلي الواحدة لها علاقة بقيم المتغيرات الخارجية، والمتغير العشوائي وهيكل المعلمات. وان الاعتماد المتداخل بين المتغيرات الداخلية يمكن حلها كما في المعادلتين (16.8) و (17.8)، ويجب هنا ملاحظة ان كل المتغيرات الداخلية تعتمد على كلاً من المتغيرات العشوائية، وان الصيغ الأخرى للهيكل والشكل المختزل لنموذج المعادلات الآنية، ساري المفعول لتركيب العملية الاقتصادية نفسها.

وربما لا يكون بالإمكان تقدير المعاملات الهيكلية من تقديرات الشكل المختزل، وأحياناً يمكن الحصول على تقديرات متعددة، ويصبح لدينا مشكلة الاختيار بينهم. لذلك سنعرض النماذج التالية:

السنموذج الأول: بافستراض ان لديسنسسا نموذج الطلب والعرض (للتبسيط نحذف المتغيرات العشوائية) كما بأتي:

$$Q_{d} = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 Y \qquad ...(23.8)$$

$$Q_s = B_0 + B_1 P$$
 ...(24.8)

في هذا النموذج يُمكن تقدير قيمة واحدة فقط للمعلمة B كما سنرى لاحقاً. وبحل المعادلتين اعلاه، نحصل على معادلات الشكل المختزل وكما يأتي:

$$P = \frac{B_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - B_1} - \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - B_1} Y \qquad ...(25.8)$$

$$Q = \frac{\alpha_1 B_0 - \alpha_0 B_1}{\alpha_1 - B_1} + \frac{\alpha_2 B_1}{\alpha_1 - B_1} Y \qquad ...(26.8)$$

ويمكن كتابة الشكل المختزل لهاتين المعادلتين (25.8) و (26.8) في الصيغة الآتية:

$$P = \pi_1 - \pi_2 Y$$
 ...(27.8)

$$Q = \pi_3 + \pi_4 Y ...(28.8)$$

حيث ان:

$$\pi_1 = \frac{B_0 - \alpha_0}{\alpha_1 - B_1}$$
 , $\pi_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1 - B_1}$

$$\pi_3 = \frac{\alpha_1 B_0 - \alpha_0 B_1}{\alpha_1 - B_1}, \quad \pi_4 = \frac{\alpha_2 B_1}{\alpha_1 - B_1} \qquad \dots (29.8)$$

ويمكن تقدير معلمات معادلة العرض (24.11) من معلمات الانحدار المقدر لمعادلات الشكل المختزل كما يأتى:

$$\hat{B}_{1} = \frac{\hat{\pi}_{4}}{\hat{\pi}_{2}}$$

$$\hat{B}_{0} = \hat{\pi}_{1} - B_{1} \hat{\pi}_{4} \qquad ...(30.8)$$

ولكن يصعب الحصول على معلمات معادلة الطلب (23.11) أي (α_0 و α_1 و α_2 من معلمات الشكل المختزل. وهكذا فان معادلة العرض قابلة للتقدير، أما معادلة الطلب فإنها غير قابلة للتقدير.

من جانب آخر، نفترض ان نموذج العرض والطلب يأخذ الشكل الآتى:

$$Q_d = B_0 + B_1 P$$
 ...(31.8) دالة الطلب

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 R$$
 ...(32.8) دالة العرض

يلاحظ من النموذج السابق، ان معادلة الطلب قابلة للتقدير، أما معادلة العرض فإنها غير قابلة للتقدير.

النمسوذج الثانسي: بافتراض أن لدينا النموذج الآتى:

$$Q = B_0 + B_1 P + B_2 Y + B_3 R \qquad ... (33.8)$$

$$Q = \alpha_0 + \alpha_1 P \qquad \dots (34.8)$$

ويلاحظ من النموذج السابق، يمكن تقدير قيمتين للمعلمة (α_1) ، حيث ان R يمثل المطر الذي يؤثر على الطلب وليس على العرض، (إذا كان هناك مطر كثير مثلاً فقد R لا يذهب الناس إلى التسوق). وإن معادلات الشكل المختزن تصبح:

$$Q = \frac{B_1 \alpha_0 - B_0 \alpha_1}{B_1 - \alpha_1} - \frac{\alpha_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} Y - \frac{\alpha_1 B_3}{B_1 - \alpha_1} R \qquad ...(35.8)$$

$$P = \frac{\alpha_0 - B_0}{B_1 - \alpha_1} - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1} Y - \frac{B_3}{B_1 - \alpha_1} R \qquad ...(36.8)$$

وبالتعبير عن معادلات الشكل المختزل السابق في الشكل الآتي:

$$Q = \pi_1 - \pi_2 Y - \pi_3 R \qquad ...(37.8)$$

$$P = \pi_4 - \pi_5 Y - \pi_6 R \qquad ...(38.8)$$

ويلاحظ ان المعلمة (α_1) يكون لها قيمتين مقدرتين هما:

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\pi}_2}{\hat{\pi}_c} \qquad \dots (39.8)$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{\hat{\pi}_3}{\hat{\pi}_c} \qquad \dots (40.8)$$

وليست بالضرورة ان تكون المغادلتين (39.8) و (40.8) متساويتان. ونحصل من كل معادلة منها على تقدير (α_0) وكما يأتي:

$$\alpha_0 = \pi_4 - \alpha_1 \, \pi_2 \qquad \dots (41.8)$$

ومن ثم فان المعادلة (34.8) يكون لها تشخيص علوي، أما المعادلة (33.8) تكون غير مشخصة بسبب عدم القدرة على الحصول على معلمات الانحدار المقدرة الخاصة بها (B_1 و B_2 و B_3) من معلمات الانحدار لمعادلات الشكل المختزل.

النموذج الثالث: بافتراض ان نموذج المعادلات الآنية الآتية:

$$Q_s = B_0 + B_1 P + B_2 S \qquad ...(42.8)$$

$$Q_{d} = \alpha_{0} + \alpha_{1}P + \alpha_{2}I \qquad ...(43.8)$$

$$Q_s = Q_d \qquad \dots (44.8)$$

المطلوب: إيجاد تشخيص المعادلات الآنية من خلال الشكل المختزل لهيكل النموذج.

الحسل:

لإيجاد تشخيص المعادلة من خلال الشكل المختزل نتبع ما يأتى:

- جد الشكل المختزل بالنسبة لـ P:

$$Q_s = Q_s = \overline{Q}$$

$$B_0 + B_1P + B_2S = \alpha_0 + \alpha_1P + \alpha_2I$$

$$B_1 P - \alpha_1 P = \alpha_0 - B_0 + \alpha_2 I - B_2 S$$

$$(B_1 - \alpha_1)P = \alpha_0 - B_0 + \alpha_2 I - B_2 S$$
 وبالقسمة على $(B_1 - \alpha_1)$ نحصل على:

$$P = \frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1} I - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1} S \qquad ...(45.8)$$

ويمكن كتابة هذه المعادلة بالشكل المختزل كما يأتي:

$$P = A_1 + A_2 I - A_3 S ... (46.8)$$

- نشــتق الشــكل المختزل بالنسبة للمتغير (Q)، وبالتعويض عن قيمة (P) في المعادلة (42.8) او (43.8) نحصل على معادلة الشكل المختزل للمتغير (Q)، وكما يأتى:

$$Q = B_0 + B_1 \left[\frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1} I - \frac{B_2}{B_1 - \alpha_1} S \right] + B_2 S$$

وبفك القوس، نحصل على:

$$Q = B_0 + \frac{B_1 \alpha_1 - B_1 B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1 \alpha_2}{B_1 - \alpha_1} I - \frac{B_1 B_2}{B_1 - \alpha_1} S + B_2 S$$

وبإيجاد المضاعف المشترك نحصل على:

$$Q = \frac{B_0 \, B_1 - B_0 \, \alpha_1 + B_1 \, \alpha_1 - B_1 B_0}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1 \, \alpha_2}{B_1 - \alpha_1} \, I - \left[\frac{B_1 \, \boldsymbol{B}_2 + B_1 \, B_{2-} \, \alpha_1 \, B_2}{B_1 - \alpha_1} \right] S$$

وبعد الاختصار والتبسيط، نحصل على:

$$Q = \frac{B_1 \alpha_1 - B_0 \alpha_1}{B_1 - \alpha_1} + \frac{B_1 \alpha_2}{B_0 - B_2} I - \frac{\alpha_1 B_2}{B_0 - B_2} S$$
 ...(47.8)

ويمكن كتابة الشكل المختزل كما يأتي:

$$Q = A_4 + A_5 I - A_6 S ...(48.8)$$

أذن المعادلات (46.8 ، 48.8) تمثل الشكل المختزل كما يأتي:

$$P = A_1 + A_2 S - A_3 I \qquad ...(49.8)$$

$$Q = A_4 + A_5 I - A_6 S \qquad ...(50.8)$$

حيث ان:

$$A_1 = \frac{\alpha_1 - B_0}{B_1 - \alpha_1}$$
, $A_2 = \frac{\alpha_2}{B_1 - \alpha_1}$

ولتشخيص المعادلات، يمكن الحصول على قيمة مقدرة واحدة لكل معلمة من معلمات الانحدار المقدرة الانحدار للنموذج في المعادلتين (42.8) و (43.8)، من خلال معلمات الانحدار المقدرة لمعادلات الشكل المختزل:

$$B_1 = \frac{A_5}{A_2} \qquad , \qquad \alpha_1 = \frac{A_5}{A_3}$$

$$B_2 = -A_3(B_1 - \alpha_1)$$
 , $\alpha_2 = A_4 - B_1A_1$

$$\alpha_0 = A_4 - \alpha_1 A \qquad \dots (52.8)$$

ومن ثم يمكن القول ان المعادلات السلوكية لنموذج المعادلات الآنية تكون مشخصة.

5.8 تقدير نموذج المعادلات الآنية،

:Estimation of Simultaneous Equations Model

يمكن الوصول إلى التقدير الملائم باستخدام OLS أو أي طريقة أخرى من الطرق المستخدمة في تقدير نماذج المعادلات الآنية وهي:

1.5.8 طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة:

Indirect Ordinary Least Square (IOLS)

تسمى هذه الطريقة بطريقة الشكل المختزل، وتستخدم في تقدير المعادلات المشخصة تماماً في نموذج المعادلات الآنية، ومن ثم تستخدم طريقة OLS في تقدير معلمات انحدار الشكل المختزل (أو المحور) ومنها يمكن الحصول على معلمات المعادلات المشخصة المراد تقديرها.

رأينا فيما تقدم ان طريقة OLS تقود إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة إذا ما تسم تطبيقها لغرض الحصول على تقديرات لمعالم الصورة الهيكلية، مما يستدعي اللجوء إلى طرق أخرى للحصول على تقديرات غير متحيزة ومتسقة منها IOLS.

تستخدم هذه الطريقة لتقدير المعالم الهيكلية للمعادلات المشخصة تماما في نموذج المعادلات الآنية عبر استخدام الصورة المختزلة. وتتضمن الطريقة الخطوات الآتية:

- 1- إيجاد النموذج المختزل، وكما تم عرضه في المباحث السابقة، أي التعبير عن المتغيرات الداخلية المرتدة زمنيا.
 - 2- تطبيق طريقة المربعات الصغرى الاعتيادية لتقدير معلمات النموذج المختزل.

3- يستم الحصول على مقدرات المعلمات الهيكلية من مقدرات معاملات الشكل المختزل السذي تسم الحصول عليه في الخطوة (2) وذلك باستخدام العلاقات الرياضية التي تجمع بين معالم الشكل الهيكلي ومعالم الشكل المختزل.

ان تقدير ات Bs في بعض الأحيان، بطريقة (IOLS) لا تحقق نفس التقدير لـ B، وبشكل ملفت للنظر، وفي هذه الحالة يكون هناك اكثر من مقدر واحد لمعاملات خاصة في هيكل المعادلة بطريقة (IOLS)، وهذه تميز المعادلة التي يكون لها تشخيص علوي، Over Identified.

وعندما تكون المعادلة مشخصة معنى ذلك وجود وحدة مقدرة بطريقة (IOLS) لكل واحدة من معلماتها. وعندما تكون المعادلة غير مشخصة يصبح من المستحيل ان نبني المقدرات بطريقة (IOLS) لكل المعلمات. فعلى سبيل المثال، لا يوجد معدل أو توليفة لــــ(π_s) فــي المعادلة (31.8) و(32.8) الذي نحصل منها على (α_1)، ومعادلة العرض (33.8) تكون غير مشخصة.

باختصار، يمكن القول بأن المعادلة إما ان تكون مشخصة وتعتمد على المقدرات بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (IOLS) التي يمكن تشكيلها، او أن تكون المعادلة غير مشخصة ولا تعتمد على المقدرات بطريقة (IOLS). لذلك فان طريقة (ILS) متحيزة، Bias ولكنها متوافقة، Consistent.

وعندما تكون المعادلة مشخصة فان طريقة (IOLS) تقودنا بالضبط إلى التقدير نفسه كما هو الحال في طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين (TS LS) التي تعطي وضع مفرد للمعادلات، لذلك تكون طريقة (TS LS) مفضلة في الدراسات القياسية التطبيقية، خاصة عندما تكون المعادلة لها تشخيص علوى.

مثال 1.8: افتراض لدينا البيانات الآتية عن نموذج العرض والطلب:

جدول (1.8): قيم متغيرات النموذج

			S	Figure 1 and
1	10	50	100	15
2	12	54	102	12
3	9	65	105	11
4	15	84	107	17
5	14	75	110	19
6	15	85	111	30
7	16	91	111	28
8	14	60	113	25
9	17	40	117	23
10	19	70	120	35

المطلوب: قدر نموذج المعادلات الآنية باستخدام طريقة IOLS.

الحل: نطبق طريقة OLS على الجدول اعلاه، باستخدام المعادلتين (49.8) و (50.8) لنحصل على ما يلى:

$$\hat{P} = -19.60 + 0.28S + 0.14I$$

S_e 13.46 0.14 0.11

$$t - value (1.4) (1.9) (1.2) ...(53.8)$$

$$\hat{Q} = 215.03 + 1.715S + 1.87I$$

باستخدام قيم المعلمات المقدرة أعلاه في معادلة الشكل المختزل (51.8) نحصل على:

$$\hat{B}_1 = \frac{A_6}{A_3} = \frac{1.87}{0.14} = 13.36$$

$$\hat{\alpha}_1 = \frac{A_5}{A_2} = \frac{-1.71}{0.28} = -6.11$$

$$\hat{\mathbf{B}}_2 = -\mathbf{A}_2 \left(\hat{\mathbf{B}}_1 - \hat{\alpha}_1 \right)$$

$$=-0.28[(13.36)-(-6.11)]=-5.45$$

$$\hat{\alpha}_2 = A_3 \left(\hat{B}_1 - \hat{\alpha}_1 \right)$$

$$= 0.14[(13.36) - (-6.11)] = 2.73$$

$$B_0 = A_4 - \hat{B}_1 A_1$$

$$= 215.03 - [(13.36) - (19.65)] = 477.55$$

$$\hat{\alpha}_0 = A_4 - \hat{\alpha}_1 A_1$$

$$= 215.03 - [(-6.11)(-19.65)] = 94.97$$

وباختصار هناك مشكلتين رئيسيتين عند استخدام طريقة (IOLS) هي:

أ- يمكن تطبيقها على المعادلة المشخصة تماماً، ولا يمكن تطبيقها في المعادلة التي لها تشخيص علوي.

ب- يصعب اشتقاق معادلات الشكل المختزل، حيث انها تتطلب استخدام هيكل المعادلات الجبرية، ولكن لحل هاتين المشكلتين نستخدم طريقة (TS LS) بدلاً من (IOLS) في نظام المعادلات الآنية.

2.5.8 طريقة المتغير الأداتي، (Instrumental Variable (IV)

تهدف هدف الطريقة إلى تحقيق درجة الارتباط بين المتغيرات المستقلة والمتغير العشوائي وذلك من خلال استخدام متغيرات خارجية ملائمة كمتغيرات أدانية.

وتستخدم هذه الطريقة في تقدير المعادلات السلوكية التي يكون لها تشخيص علوي وعندما يكون المتغير الخارجي له ارتباط بالمتغير العشوائي و لا يمكن الحصول على تقديرات متوافقة للمعلمات باستخدام طريقة المتغيرات الأداتية. وعليه فان إيجاد المتغيرات الأداتية في نموذج المعادلات الآنية ليست مشكلة أساسية وذلك لأن المتغيرات الخارجية غير موجودة في المعادلة لاستخدامها كمتغيرات مستقلة.

مثال 2.8: بافتراض ان النموذج المراد تقديره هو:

$$Q_s = B_0 + B_1 P + B_2 S + U_1 \qquad ...(55.8)$$

$$Q_d = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 I + U_2$$
 ...(56.8)

$$Q_s = Q_d \qquad \dots (57.8)$$

يلاحظ من المعادلة (55.8) وجود متغير خارجي واحد هو (8) وله ارتباط بالمتغير العشوائي U_1 ، لذلك نحتاج إلى متغير أداتي واحد. وباستخدام الشكل المختزل للنموذج بالنسبة إلى P، نحصل على:

$$P = A_1 - A_2S + A_3I + U_i \qquad ...(58.8)$$

وللحصول على تقدير معلمات الانحدار من المعادلة (58.8) تستخدم لبناء المتغير الأداتي (P) كما يأتي:

$$P = A_1 - A_2 S + A_3 I \qquad ...(59.8)$$

وبما انه يوجد متغير خارجي واحد فقط يظهر في الجهة اليمنى من المعادلة (58.8) لذلك فان (P) ليس له علاقة ارتباط بحدود المتغيرات العشوائية (U_1) و (U_2) ويمكن ملحظة ذلك فيما إذا كان معامل التحديد المتعدد (R^2) في المعادلة (59.8) مساوياً

للواحد الصحيح، أي ان ($R^2=1$) فان $(P=\hat{P})$ ، ومن ثم لا يكون هناك اختلاف بين مقدرات النموذج بطريقة (OLS) وبين طريقة (TSLS).

لذلك فان تعويض المتغيرات المساعدة للمتغيرات الداخلية في الجهة اليمنى من النموذج، في كل معادلة يتم تقديرها بطريقة (OLS) يمكن وصفها بالكيفية التي وردت في المعادلتين 55.8 و 56.8 و بما أننا قد حصلنا على تقدير A_3 ، A_2 ، A_1 ، A_2 ، A_3 الذي يساوى:

$$\hat{P} = -19.60 + 0.28S + 0.14I \qquad ...(60.8)$$

وبالتعويض عن قيم S، I في الجدول (1.8) أعلاه نحصل على P كما يأتي:

$$\begin{split} \hat{P}_1 &= -19.60 + 0.28(100) + 0.14(15) \\ \hat{P}_1 &= -10.50 \\ \hat{P}_2 &= -19.60 + 0.28(102) + 0.14(12) \\ \hat{P}_2 &= 10.65 \end{split}$$

وهكذا بالطريقة نفسها والى نهاية الجدول نحصل على القيم المقدرة للمتغيرات الأداتية (\hat{P}_i) ، كما في الجدول الآتى:

جدول (2.8): القيم المقدرة للمتغير (\hat{P}) .

this bank	The control of the co							\$	9	-10 ⁻
)	10.50	10.65	11.35	12.75	13.87	15.67	15.39	15.54	16.39	18.89

ويمكن تقدير نموذج المعادلات الآنية بطريقة المتغيرات الأدانية بأسلوب آخر والذي يمكن تلخيصه بالخطوات الآتية:

أولاً: اختيار المتغيرات الأداتية التي يتم إحلالها محل المتغيرات الداخلية التي تظهر كمتغيرات مستقلة في المعادلة المراد تقديرها، وان يكون للمتغير الأداتي عدة خصائص منها:

الا يرتبط المتغير الأداتي بالمتغير العشوائي، حد الخطأ في المعادلة المراد تقديرها.

□ ان يكون له علاقة ارتباط قوية بالمتغير (أو المتغيرات) الداخلية التي تظهر
 في المعادلة المراد تقديرها.

□ ان يكون له على الأقل علاقة ارتباط بالمتغير (أو المتغيرات) الخارجية التي
 تظهر في المعادلة المراد تقديرها كمتغيرات مستقلة.

□ عند استخدام اكثر من متغير أداتي في المعادلة المراد تقديرها يجب ان يرتبط كل منهم بالمتغير الآخر.

ثانياً: ضرب المتغير الأداتي (كل متغير مساعد على حدة) في المعادلة المراد تقديرها ومن ثم جمع حاصل الضرب لكل المشاهدات، ويترتب على ذلك وجود عدة معادلات، وعند حل هذه المعادلات يمكننا الحصول على قيم المعلمات المقدرة لهذا النموذج.

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i$$
, $(i = 1,2,...,n)$...(61.8)

حيث ان:

Y = 1 متغير داخلي في U_i ، وذلك لان Y متغير داخلي في النموذج المراد تقديره. النموذج المراد تقديره العادية (OLS) على المعادلة (61.8) نحصل وعند تطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية (OLS) على المعادلة (61.8)

على تقديرات متحيزة لمعلمات المعادلة في النموذج السابق، ولكي نحصل على قيم مقدرة غير متحيزة لمعلمات المعادلة يتم ذلك باستخدام طريقة (IV) كما يأتى:

أ- اختسيار المتغير الأداتي الذي لا يكون له ارتباط بالمتغير العشوائي (U_i) ولكن له علاقة ارتباط قوي بالمتغير الداخلي في المعادلة، وليكن W_i ثم إعادة كتابة المعادلة

عادت ارتباط توي بالمنعير الداخلي في المعادد. المراد تقدير معاملاتها مع إهمال الحد المطلق لها، وتأخذ الشكل الآتي:

$$C_{i} = B_{1}Y_{i} + U_{i} \qquad ...(62.8)$$

$$c_{i} = (C_{i} - \overline{C})$$

$$v_{i} = (\overline{Y}, \overline{Y})$$

 $y_i = (Y_i - \overline{Y})$ $\overline{C} = \frac{\sum C_i}{n}$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{} \qquad \dots (63.8)$$

ب- ضرب المتغير الأداتي Wi في المعادلة (61.8) ثم جمع حاصل ضرب لكل المشاهدات نحصل على:

$$\sum (w_i c_i) = B_1 \sum (w_i y_i) + \sum (w_i u_i) \qquad ... (64.8)$$

 $w_i = W_i - \overline{W}$ حیث ان:

وبافتراض ان هناك علاقة ارتباط بين W_i و القيمة المتوقعة تكون مساوية للصفر، أي:

$$E(\sum w_i c_i) = 0$$

ومن ثم تصبح المعادلة (64.8) كما يأتي:

$$\sum (w_i c_i) = B_1 \sum (w_i y_i)$$
 ...(65.8)

وبقسمة الطرفين على على: $\sum (w_i y_i)$ ، نحصل على:

$$\hat{\mathbf{B}}_{1} = \frac{\sum (\mathbf{w}_{i} \mathbf{c}_{i})}{\sum (\mathbf{w}_{i} \mathbf{v}_{i})} \dots (66.8)$$

مـــثال 4.8: إذا توفرت البيانات الآتية عن الأنفاق الاستهلاكي، C_i ، والدخل، Y_i , في الجدول الآتي:

جـدول (3.8): لبيانات قيم ، Wi ، Yi ، Ci

	section for the section of the secti		W Company
- its males of a chain and a chain	3	3	5
2	4	5	10
3	6	6	11
4	11	6	14
	$\sum C_i = 24$	$\sum Y_i = 20$	$\sum W_i = 40$

المطلوب: باستخدام البيانات الواردة في الجدول أعلاه، تقدير المعادلة الآتية:

$$C_i = B_0 + B_1 Y_i + U_i$$

حيث أن: (Wi) متغير أداتي.

الحك: لإيجاد قيمة المعلمة B_1 نجد انحرافات قيم المتغيرات عن أوساطها الحسابية كما يأتى:

$$\overline{C} = \frac{\sum C_i}{n} = \frac{24}{4} = 6$$

$$\overline{Y} = \frac{\sum Y_i}{n} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\overline{W} = \frac{\sum W_i}{n} = \frac{40}{4} = 10$$

وبتطبيق الصيغة الآتية:

$$B_1 = \frac{\sum (w_i c_i)}{\sum (w_i y_i)}$$

نجد قيم كل من انحراف المتغيرات y_i ، c_i ، w_i المتغيرات v_i ، v_i عن أوساطها الحسابية ثم نضرب w_i و كذلك w_i ، كما في الجدول الآتى:

 B_{l} بنياتات المستخدمة في تقدير

	J. E.		nday on the second	c	Υį	\mathbf{W}_{i}	Wici	$\mathbf{W_{iy_i}}$
1	3	3	5	-3	-2	-5	15	10
2	4	5	10	-2	0	0	0	0
3	6	6	11	0	1	1	0	1
4	11	6	14	5	1	4	20	4
\sum	24	20	40	0	0	0	35	15

$$\therefore \hat{B}_1 = \frac{\sum (w_i c_i)}{\sum (w_i y_i)} = \frac{35}{15} = 2.33$$

3.5.8 طريقة المربعات الصغرى ذات المرحلتين،

:Two Stage Least Squares (TSLS)

تعدد هذه الطريقة من الطرق الشائعة الاستخدام في الدراسات القياسية التطبيقية للحصول على مقدرات متوافقة للمعلمات في نموذج المعادلات الآنية الذي تم افترضد لمعالجة التأثير المتبادل في قيمة المتغير التابع الاستهلاك (Ci) على الدخل

 (Y_i) والتأثير في قيمة المتغير المستقل (Y_i) على (C_i) ، بحيث أصبح الفرض الذي يتعلق باستقلال معامل المتغير العشوائي عن المتغير المستقل غير صادق.

وان جوهر هذه الطريقة هو استبدال (أو إحلال) المتغيرات المستقلة التي تستخدم كتقريب للمتغير الأصلي، والذي لا يرتبط بشكل أساسي بالمتغير العشوائي ومن ثم فان طريقة OLS يمكن استخدامها في تقدير المعادلة، وربما تكون نتيجة تقدير المعاملات الأصلية للمعادلة متحيزة ولكنها تتلاشى كلما كبر حجم العينة.

تعتبر طريقة TSLS من ابسط وأوسع الطرق الخاصة لتقدير المعلمات الهيكلية للمعادلات المشخصة تماما وفوق التشخيص في نموذج المعادلات الآنية، وتقود الطريقة إلى مقدرات تتسم بالاتساق حيث تقود الى قياسات متطابقة مع ذلك التي يمكن التوصل إليها عبر طريقة IOLS.

تتفوق طريقة TSLS على طريقة IOLS من حيث إنها تعطي أيضا الأخطاء المعيارية للمعلمات الهيكاية المقدرة مباشرة والتي يتعذر الحصول عليها من خلال IOLS. ويشترط عند التطبيق طريقة TSLS تحقق الافتراضات الاعتيادية في عنصر الخطأ أي ان:

$$U_t \sim N(0, \sigma^2 U)$$
, $E(U_t U_s) = 0$, $t \neq s$

وبالتالي انعكاس تحقق هذه الافتراضات على عنصري الخطأ في النموذج المختزل أي ان:

$$V_t \sim N(0, \sigma^2 U)$$
 , $E(V_t V_s) = 0$, $t \neq s$

إضافة إلى أعلاه يشترط ان تكون عناصر الخطأ العشوائي في معادلات الشكل المختزل مستقلة عن المتغيرات الخارجية والداخلية المرتدة زمنيا. كما ويجب ان تكون عدد مشاهدات العينة اكبر من عدد المتغيرات الخارجية والمتغيرات المرتدة زمنيا (ان تكون العينة كبيرة بدرجة كافية).

وتتضمن الطريقة مرحلتين من مراحل التقدير:

المسرحلة الأولسى: يستم إجسراء انحدار لكل متغير داخلي على مجموعة المتغيرات الخارجية في نظام المعادلات الآنية للحصول على معادلات الشكل المختزل. ويقسود هذا إلى قيمة مقدرة للمتغير الداخلي ترتبط بصورة اقل مع حد الخطأ العشوائي للمعادلة الهيكلية وذلك بالمقارنة مع ارتباط المتغير الأصلي مع حد الخطأ العشوائي.

المرحلة الثانية: تستخدم القيم المقدرة للمتغيرات الداخلية بدلا عن قيمها الأصلية لتقدير المعادلات الهيكلية للنموذج للحصول على قيم مقدرة للمتغيرات الداخلية من خال التعويض بالقيم الفعلية للمتغيرات الخارجية في معادلات الشكل المختزل. ويعني ذلك الأمر انه يجرى تنقية المتغيرات الداخلية الموجودة على يمين المعادلة الهيكلية من شوائب الارتباط مع العنصر العشوائي، مما يجعل مقدر الت TSLS متسقة للمعلمات الهيكلية.

وإن كانت هذه الطريقة تعطينا تقديرات متحيزة ومتوافقة فان الاعتماد على عينة ذات حجم كبير نسبياً يؤدى إلى إيجاد تقديرات جيدة للمعلمات.

تتفق هذه الطريقة مع الطرق الأخرى (IOLS) و (IV) في محاولة التخلص من التحيز الوارد في نموذج المعلمات الآنية وذلك بسبب وجود متغيرات داخلية

كمتغيرات مستقلة في المعادلة المراد تقديرها. ويتم استخدام هذه الطريقة في تقدير المعادلات التي يكون لها تشخيص علوي وتتلخص هذه الطريقة في الخطوات الآتية:

1- فصل المتغير المستقل، وعزله عن ذلك الجزء الذي يرتبط بمعامل المتغير العشوائي.

2- استخدام القيم الجديدة، والتي توصلنا إليها بعد عزل الجزء الذي يرتبط بالمتغير العشوائي، بطريقة (OLS) في إيجاد تقدير المعاملات.

مــثال 5.8: لمعـرفة الكيفـية التي تطبق بها هذه الطريقة، نستخدم نموذج للعرض والطلــب ولنفــترض ان هيكل النموذج المراد تقديره يمكن وصفه بالكيفية الوارد ذكره في المثال 1.8.

حيث ان:

متغيرات داخلية في النموذج	man die	ر	P: تمثل الســـــــــــــــــــــــــــــــــــ
متغيرات خارجية في النموذج	ĺ		: تمثل الاســــتثمار
متغيرات خارجية في النموذج			ع = الادخــــار

وبافتراض ان بيانات النموذج معطاة في الجدول (1.8).

¿U و U2: تمثل المتغيرات العشوائية.

Q: تمثل الكمية المطلوبة والمعروضة __

المطلوب: تقدير معلمات النموذج باستخدام طريق المربعات الصغرى ذات المرحلتين (TSLS).

الحل:

أولاً: إجراء انحدار P على P ، P باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية، OLS، نحصل على المعادلة التقديرية لـ \hat{P} ، وكما في المعادلة 66.8.

وباستخدام المعادلة أعلاه وبيانات كل من S و I الواردة في الجدول (1.8) نحصل على قيم P، كما في الجدول 8.8.

جدول (8.8): قيم P المقدرة

, , , ,				
i	Ŷ			
1	10.50			
2	10.65			
3	11.35			
4	12.75			
5	13.87			
6	15.67			
7	15.39			
8	15.54			
9	16.39			
10	18.89			

ثانياً: يتم إحلال P محل الكمية Q ثم إجراء انحدار Q على P وذلك باستخدام طريقة (OLS)، نحصل على:

 $\hat{Q} = 49.41 + 1.27\hat{P}$

وعند مقارنة المعلمات المقدرة بطريقة TSLS مع طريقة IOLS يتبين ان هناك علاقة قريبة، وان الاختلف بين مقدرات الطريقتين ناتج من دوران قيم \hat{P} في الجدول (2.8).

لذلك عندما تكون المعادلة مشخصة تماماً فان TSLS و IOLS يكونان متساويان. وان قيم في عندما تكون المعادلة مشخصة تماماً فان TSLS و IOLS قيم في المعادلة التي يكون لها تشخيص علوي. ولكن وشم ان TSLS تستخدم في الحصول على مقدرات المعاملات للمعادلة التي يكون لها تشخيص علوي. وشخيص علوي. وثم تشخيص علوي.

الأسئلة والتمارين

السؤال 1.8: باستخدام النموذج الآتي:

$$Q_d = \beta_0 + \beta_1 W_i + U_1$$
 دالة الطلب

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 W_i + \alpha_2 O_i + U_2$$
 دالة العرض

المطلوب: إيجاد الشكل المختزل للنموذج.

السوال 2.8: إذا كان نظام المعادلات الآنية لنموذج العرض والطلب كما يأتى:

$$Q_d = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 I + U_1$$
معادلة الطلب

$$Q_s = \alpha_0 + \alpha_1 P + \alpha_2 S + U_2$$
معادلة العرض

المطلوب:

أ- إيجاد الشكل المختزل للنموذج.

ب- بافتراض لدينا البيانات الواردة في الجدول الآتي:

	P			
1	20	100	200	30
2	24	108	204	24
3	18	130	110	22
4	30	170	114	34
5	28	150	220	38
6	30	170	222	60
7	32	180	222	56
8	28	120	226	50
9	34	80	234	46
10	38	140	240	70

قدر هيكل المعلمات للنموذج أعلاه باستخدام طريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (IOLS)، ثم بين الخطوات المطلوبة لذلك التقدير.

السؤال 3.8: إذا كان لديك معادلتين هيكليتين يمثلان دالة الطلب والعرض كما يأتي:

$$Q_d = lpha_0 + lpha_1 P + U_1$$
 ($lpha_1 < 0$) دالة الطلب

$$Q_s = \beta_0 + \beta_1 P + \beta_2 Y + U_2 \quad (\beta_1 > 0)$$
 دالة العرض

حيث ان:

Q: تمثل الكمية.

P: يمثل السعر.

Y: تمثل الدخل.

المطلوب:

- 1- هل يعد النموذج أعلاه من نماذج المعادلات الآنية، ولماذا؟
 - 2- حدد المتغيرات الخارجية والداخلية في النموذج.
 - 3- أوجد الشكل المختزل للنموذج.
- 4- هل يمكن تقدير معاملات النموذج بطريقة OLS ولماذا ؟
 - 5- هل تعد معاملات النموذج متحيزة ومتوافقة ام ماذا.

السوال 4.8: كون نموذج المعادلات الآنية لنموذج العرض والطلب على النقود، ثم حدد المتغيرات الخارجية والداخلية للنموذج.

السوال 5.8: كون نموذج كينزي لتحديد الدخل القومي، ثم بيّن المتغيرات الداخلية والخارجية للنموذج.

السؤال 6.8: عرّف مع الاستعانة بمثال بسيط:

- 1- المعادلة المنفردة ومنظومة المعادلات الآنية.
 - 2- الصيغة الهيكلية والصيغة المختزلة.
- 3- معادلة مشخصة تماماً ومعادلة فوق التشخيص.
 - 4- المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية.
 - 5- متغير مرتد زمنياً ومتغير داخلي.

السؤال 7.8: إذا أعطيت المعادلات الآنية الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 Y_{t-1} + U_t$$

 $Y_t = C_t + I_t$

حيث ان:

. تمثل أنفاق المستهلك، الدخل و الاستثمار على التوالى. I_t ، Y_t ، C_t

. متغیر متغیر ات داخلیهٔ ، في حین I_t متغیر خارجي C_t

نمثل متغير داخلي مرتد زمنياً. Y_{t-1}

 C_t المطلوب: اشتق الصيغة المختزلة لكل من Y_t و

السؤال 8.8: ان بعض الأفراد يعتقدون ان المبيعات تعتمد على مصروفات الاعلان، وبعض الأفراد الآخرين يعتقدون على العكس من ذلك بأن المصروفات على الإعلان تعتمد على المبيعات، ضع نموذج معادلات آنية لهذه العلاقات وحدد عدد المعادلات في النموذج، وما هي المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية لذلك النموذج ؟

السؤال 9.8: افترض انك أعطيت النموذج الآتى:

$$\begin{split} & C_{t} = \alpha_{1} + \alpha_{2}Y_{t} + E_{t} \\ & I_{t} = B_{1} + B_{2}Y_{t} + B_{2}G_{t-1} + U_{t} \\ & Y_{t} = C_{t} + I_{t} + G_{t} \end{split}$$

عـندما يكـون Y₁ الدخل، I₂ الاستثمار، C₃ الاستهلاك ، أوجد نظام الشكل المختزل للنموذج وحدد المتغيرات الداخلية والمتغيرات الخارجية، ثم بيّن هل ان دالة الاستهلاك مشخصة او فوق المشخصة، ولماذا ؟

الفصل التاسع: مشكلة التشخيص Identification Problem

- 1.9 المقدمـــة
- 2.9 طبيعة مشكلة التشخيص
- 3.9 شروط التشخيص
 - 4.9 الأسئلة والتماريـــن

الفصل التاسع: مشكلة التشخيص

Identification Problem

1.9 المقدم____ة:

عـندما يكـون المتغير التابع في معادلة ما متغيراً مستقلاً في معادلة أخرى، يكـون لدينا نظام او نموذج معادلات آنية، اي ان لكل متغير داخلي في النظام هناك معادلـة سلوكية أو هيكلية وان استخدام طريقة OLS لتقدير المعادلات الهيكلية يؤدي إلى تقديرات معلمات متحيزة وغير متسقة، وهو ما يُدعى بتحيز المعادلات الآنية وكما تمت الإشارة إلية في الفصل السابق. وللحصول على تقديرات للمعلمات متسقة يجب الحصـول أو لا علـى معـادلات الشكل المختزل للنموذج والتي تعبر عن المتغيرات الداخلـية في النظام كدالة فقط في المتغير الخارجي للنموذج. ولمعرفة طبيعة الشكل الهيكلي والشكل المختزل لنظام المعادلات الآنية نأخذ النموذج التالى:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t$$
 ...(1.9)

$$Y_t = C_t + I_t \qquad \dots (2.9)$$

يتضح من المعادلتين (1.9) و (2.9) ان Y_t متغيران داخليان وان I_t متغير المعادلة (1.9) خارجي يتحدد من خارج النموذج، وحيث ان Y_t تعتمد على Y_t في المعادلة (1.9) وتعتمد Y_t على Y_t وهذا يعني ان المعادلة (2.9) فإن Y_t وهذا يعني ان لدينا نموذج معادلات آنية لان التغير في U_t يؤثر على Y_t في المعادلة (1.9) وهذا بدوره يؤثر على Y_t في المعادلة (2.9) وكنتيجة لذلك تكون Y_t و Y_t متر ابطتين مؤدية ذلك إلى تقدير ات OLS متحيزة وغير متسقة لمعادلة Y_t هذا فيما يتعلىق

بالشكل الهيكا الهيكا المختزل، Structural model. أما بالنسبة إلى الشكل المختزل، Reduced form فيمكن الحصول عليه باتباع الآتى:

نعوض المعادلة (2.9) في المعادلة (1.9):ذذ

$$C_{t} = B_{0} + B_{1}(C_{t} + I_{t}) + U_{t} \qquad ...(3.9)$$

$$C_{t} = B_{0} + B_{1}C_{t} + B_{1}I_{t} + U_{t}$$

$$C_{t} - B_{1}C_{t} = B_{0} + B_{1}I_{t} + U_{t}$$

$$C_{t}(1 - B_{1}) = B_{0} + B_{1}I_{t} + U_{t}$$

$$C_{t} = \frac{B_{0}}{1 - B_{t}} + \frac{B_{1}}{1 - B_{t}} I_{t} + \frac{1}{1 - B_{t}} U_{t} \qquad ...(4.9)$$

معادلة الشكل المختزل الأولى:

$$C_{t} = \pi_{0} + \pi_{1}I_{t} + V_{1t} \qquad ...(5.9)$$

ويمكن اشتقاق معادلة الشكل المختزل الثانية بتعويض المعادلة (1.9) في المعادلة (2.9) وكالآتي:

$$Y_{t} = B_{0} + B_{1}Y_{t} + U_{t} + I_{t} \qquad ...(6.9)$$

$$Y_{t} - B_{1}Y_{t} = B_{0} + I_{t} + U_{t}$$

$$Y_{t}(1 - B_{1}) = B_{0} + I_{t} + U_{t}$$

$$Y_{t} = \frac{B_{0}}{1 - B_{t}} + \frac{1}{1 - B_{t}}I_{t} + \frac{1}{1 - B_{t}}U_{t} \qquad ...(7.9)$$

معادلة الشكل المختزل الثانية:

$$Y_{t} = \pi_{2} + \pi_{3}I_{t} + V_{2}t \qquad ...(8.9)$$

الصيغتين (5.9) و (8.9) و المشتقة من النموذج الهيكلي تمثلان النموذج المختزل ، حيث يظهر بأن المتغير ات الداخلية Y_t و C_t دالة في المتغير الخارجي I_t ، فضلاً عن الخطأ العشوائي U_t ، ان معلمات الشكل المختزل هذه تعبر عن الآثار الكلية (المباشرة وغير المباشرة) للمتغير المستقل على المتغير التابع، أي ان زيادة المتغير المستقل I_t بمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى زيادة الاستهلاك C_t بمقدار $(\frac{B_1}{1-B_1})$ وزيادة الدخل

بمقدار $(\frac{B_1}{1-B_1})$ ، في حين ان معلمات الشكل الهيكلي تقيس الأثر المباشر Y_t للمتغير المستقل على المتغير التابع.

2.9 طبيعة مشكلة التشخيص:

تشير مشكلة التشخيص إلى إمكانية حساب المعلمات الهيكلية لنموذج معادلات آنية من معلمات النموذج المختزل أو عدم إمكانية حسابها، وتعد من المشاكل الأساسية التسي تواجه به بناء النموذج القياسي، إذ تهتم بكيفية قياس كل معادلة من المعادلات الهيكلية للنموذج، عليه فإن المشكلة تتلخص في إمكانية التعرف على ما إذا كان النموذج مصاغاً بشكل يتيح الحصول على تقديرات وحيدة وفريدة للمعلمات من بيانات العينة أم لا.

وبصورة عامة يمكن القول إذا كان من الممكن الحصول على المقدرات العددية لمعلمات المعادلة الهيكلية من معاملات الشكل المختزل المقدرة فتكون حينئذ تلك المعادلة مشخصة تماماً، Exactly identified، وإذا لم يكن ذلك ممكناً فإن

المعادلة تكون غير مشخصة، Unidentified، أو تحت التشخيص، Under identified. وفي الحالة التي يكون فيها هناك إمكانية للحصول على عدة قيم عدية لبعض معلمات المعادلات الهيكلية من معاملات الشكل المختزل عندها سوف لحن يكون هناك حلاً وحيداً لهذه المعلمات وعندئذ تكون تلك المعادلة فوق التشخيص، Over identified. ويمكن توضيح مستويات التشخيص هذه كالآتى:

لنتأمل نموذج العرض والطلب الآتي:

$$Q_{d} = a_{0} + a_{1}P + U_{1} \qquad ...(9.9)$$

$$Q_{s} = b_{0} + b_{1}P + b_{2}W + U_{2} \qquad ...(10.9)$$

$$Q_{d} = Q_{s} \qquad ...(11.9)$$

حيث ان:

Qd: تمثل الكمية المطلوبة من سلعة ما.

. تمثل الكمية المعروضة من سلعة ما Q_s

P: تمثل سعر السلعة.

W: تمثل الحالة الجوية.

 U_1 ، U_2 : الخطأ العشوائي.

وان P ، Qs ، Qd متغيرات داخلية ، و W متغير خارجي.

يتضح من النموذج الهيكلي أعلاه، ان معادلة الطلب مشخصة تماماً ومن ثم يمكن تقدير معاملاتها a_i هي حين تعد معادلة العرض غير مشخصة إذ ان المتغير الخارجية من الخارجي، w قد استبعد من معادلة الطلب وان استبعاد المتغيرات الخارجية من المعادلة يمثل مفتاح التشخيص، وعليه فان تضمين المتغير الخارجي، w في معادلة

العرض جعلها غير مشخصة، ومن ثم فان منظومة العرض والطلب ككل غير مشخصة ويجب النظر بإعادة بنائها.

وبهدف جعل معادلة العرض مشخصة يمكن إضافة متغير جديد إلى دالة الطلب وهو الدخل (Y)، إذ تشير النظرية الاقتصادية إلى كون الدخل متغير مهم في تحديد الطلب على السلع والخدمات فيصبح نموذج الطلب والعرض الجديد كالآتي:

$$Q_d = a_0 + a_1 P + a_2 Y + U_1 \qquad ...(12.9)$$

$$Q_s = b_0 + b_1 P + b_2 W + U_2 \qquad ...(13.9)$$

$$Q_{d} = Q_{s} \qquad \dots (14.9)$$

حيث يتضم من المنفومة ككل مشخصة تماماً وذلك لأن كلا المتغيرين الخارجيين، هشخصتين تماماً والمنظومة ككل مشخصة تماماً وذلك لأن كلا المتغيرين الخارجيين، W، الحالة الجوية و Y، الدخل ساعدا على تشخيص الدالة التي حذفت منها.

3.9 شروط التشخيص، Identification Condition

تشخيص أي معادلة هيكلية يتطلب أيجاد الاختزال لها أولاً، وفي الواقع هناك قاعدة عامة يمكن استخدامها لهذا الغرض من دون اللجوء إلى الاختزال وتتلخص هذه القاعدة بتحقق الشرطين الآتيين:

أ- شرط الدرجة، Order Condition.

ب- شرط الرتبة، Rank Condition.

أن الشرط الأول يعد ضروري ولكنه غير كافي لتشخيص أي معادلة هيكلية، لذا وتأكيداً للشرط الأول يستوجب اجتياز المعادلة شرط الاختبار الثاني.

أ: شرط الدرجة، Order Condition:

وفقاً لهذا الشرط تكون المعادلة مشخصة عندما يكون عدد المتغيرات الداخلية (الــتابعة) والمتغيرات المحددة مسبقاً (خارجية، مرتدة زمنياً) والداخلة في المعادلات المهيكلية للنموذج مساوياً او اكبر من عدد معادلات النموذج مطروحاً منها واحد، أي:

$$K - M \ge S - 1$$

حيث ان:

K: تمثل عدد المتغيرات الداخلية والمحددة مسبقاً.

M: تمثل عدد المتغيرات التي تحتويها المعادلة الهيكلية المراد تشخيصها.

S: تمثل عدد المعادلات الهيكلية التي يحتويها النموذج.

أولاً: فإذا كانت عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها مساوياً لعدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد كانت المعادلة مشخصة تماماً أي:

$$S - M = S - 1$$

ويمكن في هذه الحالة حساب قيمة وحيدة ومنفردة للمعلمات الهيكلية من معلمات الشكل المختزل.

ثانياً: وإذا كانت عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها اقل مسن عدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد تكون المعادلة دون مستوى التشخيص أي غير مشخصة:

$$K - M \le S - 1$$

وفي هذه الحالة لا يمكن حساب أي من المعلمات الهيكلية للمعادلة من معلمات الشكل المختزل.

ثالثاً: أما إذا كان عدد المتغيرات الخارجية المستبعدة من المعادلة المراد تشخيصها اكبر من عدد المتغيرات الداخلية فيها ناقصاً واحد تكون المعادلة فوق مستوى التشخيص، أي:

K - M > S - 1

وفي هذه الحالة يمكن حساب اكثر من قيمة عددية لبعض المعلمات الهيكلية للمعادلة من معلمات الشكل المختزل.

وباختصار فان شرط الدرجة للتشخيص يُمكن بيانه في الجدول 1.9:

جدول 1.9: شرط الدرجة للتشخيص

انبع الشخرص المعادلة	عد المنعرات المعفودة M	العلامية	عداد المعادل ا
مشخصة تماماً	M	And the second s	S – 1
لها تشخيص سفلي	M	<	S – 1
لها تشخيص علوي	M	>	S – 1

حيث يمكن لشرط الدرجة للتشخيص ان يأخذ الصيغة الآتية:

 $M \ge S - 1$

ب: شرط الرتبة، Rank Condition

بموجب هذا الشرط ترتب معلمات المعادلات الهيكلية بدلالة جميع المتغيرات في المسنظومة ثم تؤخذ المعلمات المقابلة للمعلمات المفقودة في المعادلة المراد

تشخيصها وتوضع بشكل مصفوفة ثم تحسب قيمة محدد هذه المصفوفة والتي تكون ذات رتبة (S-1). فإذا كانت القيمة تلك لا تساوي صفر تكون المعادلة مشخصة، أما إذا كانت تلك القيمة مساوية إلى الصفر كانت المعادلة دون مستوى التشخيص. وإذا حدث وان كانت المصفوفة المستخرجة من المعالم الهيكلية غير مربعة عندها يتطلب تجزئتها إلى كافة المصفوفات الجزئية الممكنة وذات الرتبة (S-1)، فإذا كانت واحدة على الأقل من قيم هذه المحددات لا تساوي صفراً تكون المعادلة مشخصة، أما إذا كانت كافهة قيم المحددات ذات الرتبة (S-1) مساوية إلى الصفر فان المعادلة تكون غير مشخصة.

واحدة أو اكثر من معادلاتها غير مشخصة، وهذا النوع من النماذج لا يمكن تقدير معلماته بأي أسلوب من أساليب القياس الاقتصادي. أما إذا كانت معادلات المنظومة مشخصة تماماً ويمكن تقدير معلماتها الهيكلية بطريقة المربعات الصغرى غير المباشرة (ILS).

ويجب الإشارة هنا إلى ان المنظومة الهيكلية تكون غير مشخصة إذا كانت

ومن ناحية أخرى إذا كانت معادلات المنظومة فوق التشخيص، فيمكن تقدير معلماتها الهيكلية بواسطة طريقة المربعات الصغرى على مرحلتين (2SLS)، طريقة المتغيرات الأداتية (IV)، وطريقة الإمكان الأعظم (MLE).

ولتوضيح عملية التشخيص نأخذ المثال الآتي: مثال (1.9): شخص كل معادلة من معادلات المنظومة الآتية:

$$Y_1 = 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1$$

$$Y_2 = Y_3 + X_3 + U_2$$

$$Y_3 = Y_1 - Y_2 - 2X_3 + U_3$$

الحل:

نعيد كتابة النموذج الهيكلي بعد دمج المتغيرات الداخلية مع الخارجية وكالآتى:

$$-Y_1 + 3Y_2 - 2X_1 + X_2 + U_1 = 0$$

$$-Y_2 + Y_3 + X_3 + U_2 = 0$$

$$-Y_3 + Y_1 - Y_2 - 2X_3 + U_3 = 0$$

ولغرض الحل لابد من القيام بما يلي:

1- إهمال الأخطاء العشوائية وأعاده كتابة المعلمات الهيكلية بدلالة كافة المتغيرات في المنظومة للحصول على ما يلى:

جدول 2.9: هيكل النموذج

The company of the co	V	Y	Yı	X_{l}		The second of th
1	—1	3	0	-2	1	0
2	0	-1	1	0	0	1
3	1	-1	-1	0	0	-2

2- وبتحويلها إلى صيغة مصفوفة من خلال إيجاد مصفوفة المعاملات، نحصل على:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

3. الاختبار ات المطلوبة:

أولاً: اختبار شرط الدرجة، وصيغة الاختبار هو:

 $K-M \ge S-1$

حيث أن:

K = 6, S = 3

أ- بالنسبة للمعادلة الأولى:

6-4 , 3-1

المعادلة مشخصة تماماً، 2 = 2.

ب- بالنسبة للمعادلة الثانية:

6-3 , 3-1

المعادلة فوق مستوى التشخيص، 2 < 3.

ج_- بالنسبة للمعادلة الثالثة:

6-4, 3-1

المعادلة مشخصة تماماً، 2 = 2.

ثانياً: اختبار شرط الرتبة:

ويتم ذلك بإنشاء جدول المتغيرات الخارجية والتي لم تظهر في المعادلة المراد تشخيصها وكما يأتي:

جدول 3.9: المتغيرات الخارجية

-1	3	0	-2	1	0
0	-1	1	0	0	1
1	-1	-1	0	0	-2

ويتم ذلك من خلال شطب الصف الخاص بالمعادلة المراد تشخيصها، ثم شطب الأعمدة التي تظهر متغيراتها في هذه المعادلة وكما يأتى:

أ- بالنسبة للمعادلة الأولى:

نشطب الصف الأول من الجدول أعلاه وكذلك العمود الأول والثاني، نحصل على المصغوفة الفرعية $[Z_1]$ من المصغوفة [A] التي تم تشخيصها بالاعتماد على العمودين (S_1) و (S_2) لاحتوائها على أصغار في الصف الأول الخاص بالمعادلة الأولى أو (S_1) ومن ثم أيجاد المحدد لهذه المصغوفة.

$$|Z_1| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = [(1)(-2)] - [(-1)(1)] = -2 + 1 = -1$$

بما ان قيمة المحدد لا تساوي صفر، أذا المعادلة الأولى مشخصة تماماً.

ب- بالنسبة للمعادلة الثانية:

نأخذ المصفوفة الفرعية Z_2 من المصفوفة [A] بالاعتماد على الأعمدة (1) و (5) و (1) و ذلك لاحتوائها على أصفار في الصف الثاني الخاص بالمعادلة الثانية او Y_2

$$|Z_2| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

وبما ان هذه المصفوفة غير مربعة أذاً نجزئها إلى عدد من المصفوفات الفرعية، وكما يأتى:

$$|Z_{21}| = \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(-2) = 0 + 2 = 2$$

$$|Z_{22}| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(0) - (1)(1) = 0 - 2 = -1$$

$$|Z_{23}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(0) - (1)(0) = 0 - 0 = 0$$

وبما ان هناك على الأقل واحدة من قيم هذه المحددات للمصفوفة Z₂ لا تساوي صفراً، لذا فان المعادلة الثانية مشخصة تماماً.

ج_- أما بالنسبة للمعادلة الثالثة:

فنأخذ المصفوفة الفرعية Z_3 من المصفوفة [A] بالاعتماد على العمودين 4 و 5 لاحتوائها على أصفار في الصف الثالث الخاص لــ(3) أو Y_3 ، وكما يأتي:

$$|Z_3| = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-2)(0) - (0)(1)$$

= 0 - 0 = 0

بما أن قيمة محدد هذه المصفوفة تساوي صفر فأن المعادلة الثالثة غير مشخصة.

الأسئلة والتماريسن

السؤال 1.9: إذا كان نموذج المعادلات الآنية الآتى:

$$Y_1 = \alpha_0 + \alpha_1 Y_2 + \alpha_2 Y_3 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + e_1$$

$$Y_2 = \alpha_3 + \alpha_4 Y_1 + \alpha_5 Y_2 + \beta_3 X_3 + e_2$$

$$Y_3 = \alpha_6 + \alpha_7 Y_1 + \alpha_8 Y_2 + e_3$$

المطلوب: باستخدام شرط الدرجة ، هل ان المعادلات في النموذج أعلاه:

أ- مشخصة تماماً.

ب- لها تشخيص علوي.

جــ- لها تشخيص سفلي.

د- غير مشخصة.

السؤال 2.9: إذا توفرت لديك المعلومات الآتية عن نموذج السوق:

$$Q_d = B_0 + B_1 P + B_2 X$$

$$Q_s = \alpha_1 + \alpha_2 P$$

$$Q_d = Q_s$$

المطلوب:

أ - اشتق شرطي الرتبة والدرجة للتشخيص.

ب- حدد نوع التشخيص لمعادلات العرض والطلب في نموذج السوق.

السوال 3.9: اكتب نموذج توازن السوق لسلعة ما، بحيث تكون معادلات النموذج ذات تشخيص سفلي أو علوي، تسم اشرح ذلك في ضوء النظرية الاقتصادية الجزئية.

الفصل العاشر: المتغيرات المرتدة زمنياً

The Lagged Variables

- 1.10 المقدمة.
- 2.10 مفهوم النموذج المرتد زمنياً.
- 3.10 أسباب وجود الارتداد زمني.
 - 4.10 تقدير نموذج المرتد زمنياً:
- 1.4.10 نموذج كويك، KOYCH.
- 2.4.10 نموذج التوقع لـ CAGAN.
- 3.4.10 نموذج التعديل الجزئي لـ نيرلوف، S'NERLOV'S
- 4.4.10 نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود لله ألمون، ALMON.
 - 5.10 الأسئلة والتمارين.

الفصل العاشر: المتغيرات المرتدة زمنياً

The Lagged Variables

1.10 المقدم____ة:

في نموذج الانحدار الخطي البسيط المنتظم يرتبط المتغير التابع (Y_i) بالمتغير المستقل (X_i) ، وفي سياق السلسلة الزمنية يعني ذلك ان قيم Y و X يمكن قياسها في الفترة الزمنية نفسها ولكن السلوك الاقتصادي يكون متحركاً وربما يحدث الأثر بشكل جوهري بعد سببه، مثال ذلك أنفاق الأسر على الاستهلاك لا يعتمد فقط على مستوى الدخل الجاري بل يعتمد على مستوى الدخل في السنوات السابقة، وهذا يعني ان حالة السنجابة المتغير التابع للمتغيرات المستقلة تتباطأ وتنتشر عبر الزمن، وحيث تعرف تلك النماذج بالمتغيرات المرتدة زمنياً.

2.10 مفهوم النموذج المرتد زمنياً:

يعرف النموذج المرتد زمنياً بأنه ذلك النموذج الذي يحتوي على قيم متغيرات مسرتدة زمنياً، سواء أكانت تلك المتغيرات داخلية أم خارجية على ان تكون، من بين المتغيرات التي يحتويها النموذج.

الصياغة الرياضية للنموذج المرتد زمنيا:

بشكل عام يمكن كتابة الصبيغة العامة لنموذج الارتداد الزمني كالآتى:

$$Y_t = a + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + ... + B_s X_{t-s} + U_t$$
 ... (1.10)

ويوضح النموذج أعلاه العلاقة بين الأنفاق الاستهلاكي (Y_t) كمتغير تابع والدخل (X_t) كمتغير مستقل واحد، فضلاً عن ذلك يبين النموذج آثار المتغير المستقل (X_t)

خلال فترات زمنية سابقة (Y_t) , حيث على المتغير التابع (Y_t) , حيث تشير (Y_t) التأثير المعلوم، وذلك لأنه يعطي متوسط التأثير على المتغير التابع (Y_t) خلال الفترة الزمنية نفسها، وتشير المعلمات (Y_t) و (Y_t) التأخر الزمني الذي يقيس متوسط التأثير على المتغير التابع (Y_t) عندما يتغير (X_t) بوحدة واحدة خلال الفترات الزمنية السابقة، وإن (U_t) هو المتغير العشوائي.

وتعود تسمية النماذج القياسية بنماذج الارتداد الزمني إلى كون تأثير المتغير المستقل فيها على المتغير التابع يتوزع عبر عدد من قيم المتغير المستقل (X) المرتد زمنياً ولــــ(S) من فترات الارتداد الزمني أي قد تكون محدودة Finite، او غير محدودة Infinite، ويمكن كتابة النموذج (1.10) كالآتى:

$$Y_t = a + b_0 X_t + \sum_{i=1}^{s} b_i X_{t-s} + U_t$$
 ...(2.10)

حيث : b_i ، b₀ ، a المعلمات المراد تقديرها.

ولنفترض ان b_s تحتوي على عدد محدد من فترات الارتداد الزمني أو عدد معين من السنوات (S) أي ان:

$$\sum_{i=0}^{s} b_i < \infty \qquad \qquad \dots (3.10)$$

عليه فأن معدل الارتداد الزمني الذي يمثل متوسط جميع أوزان الارتداد التي يحتويها السنموذج بالارتباط مع الوزن النسبي لكل معلمات b على التوالي. يُمكن كتابته كما يلى:

A varage lag =
$$\frac{\sum_{i=0}^{s} ib_{i}}{\sum_{i=0}^{s} b_{i}}$$
 (i = 0,1,2,...,s) ...(4.10)

هذا وتعد المتغيرات المرتدة زمنياً متغيرات مستقلة مهمة جداً في معظم العلاقات الاقتصادية؛ ذلك لأن السلوك الاقتصادي لكل فترة زمنية محددة يتأثر إلى حد ما بنمط السلوك السائد في الفترة السابقة، كما وتعد نماذج الارتداد الزمني من النماذج المهمة جداً في عملية اتخاذ القرار، إذ تمكن من معرفة الفترة الزمنية التي ستكون فيها الوحدات الاقتصادية قادرة على الاستجابة للقرارات التي تتخذ بشأن الانتاج، المبيعات، ...الخ.

مثال 1.10: بافتراض ان الفترة (n=2) في النموذج (1.10) وانه تم تقدير النموذج وكانت النتائج كما يلي:

$$\hat{Y}_{t} = 55.02 + 0.4X_{t} + 0.3X_{t-1} + 0.2X_{t-2}$$

فأن معدل الارتداد الزمني، هو:

A varage lag =
$$\frac{\sum_{i=0}^{s} ib_i}{\sum_{i=0}^{s} b_i} = \frac{0(0.4) + 1(0.3) + 2(0.2)}{2} = 0.36$$

فالأثر في الأجل القصير (الميل الحدي للاستهلاك في الأجل القصير) على الأنفاق الاستهلاكي نتيجة زيادة الدخل المتاح بدينار واحد هو (0.4) وهذا يعني ان زيادة الدخل الشخصي المتاح للأنفاق على الاستهلاك بدينار واحد يترتب عليه زيادة في الأنفاق الاستهلاكي الشخصي في السنة نفسها بمقدار (400) فلساً.

أما الأثر طويل الأجل (الميل الحدي للاستهلاك طويل الأجل) على الأنفاق الاستهلاكي، يساوى:

$$\sum b_i = b_0 + b_1 + b_2 = 0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9$$

ويعني ذلك ان زيادة الدخل الشخصي المتاح للأنفاق بدينار واحد يترتب عليه زيادة في الأنفاق الاستهلاكي الشخصي بمقدار (900) فلساً.

3.10 أسباب وجود الارتداد الزمني:

هــناك أسباب عدة لظهور الارتداد الزمني في نماذج الاقتصاد القياسي، نذكر أهمها ما يأتي:

أ- الأسباب النفسية أي بسبب العادات والتقاليد الاستهلكية.

ب- الأسباب الفنية التي تحدث خلال بعض التغيرات المتعلقة بالانتاج، كالتغيرات في الأســعار والأجور، وكذلك فأن عرض المنتجات الزراعية يعتمد على متغيرات عديدة منها الأسعار في الفترات الزمنية السابقة.

جـ- والسبب الآخر لوجود الارتداد الزمني، يرجع إلى السبب المؤسسي والتشريعي الحكومي التي تساهم في إحداث الارتداد الزمني، مثال ذلك، قد تحول التشريعات الحكومية المنتج من استخدام العمل إلى استخدام عنصر آخر، وبهذا فأنها تؤثر في اتخاذ القرار.

ولهذه الأسباب فأن الارتداد الزمني يمثل مركزاً رئيساً في الاقتصاد لانه يؤثر في التحليل الاقتصادي سواء كان في الأجل القصير او الأجل الطويل، مثلاً نقول ان الميل الحدي للاستهلاك MPC، في الأجل القصير اقل منه في الأجل الطويل بوجود الارتداد الزمني في العوامل المؤثرة على الاستهلاك وكذلك فان مرونة الدخل في الأجل القصير تكون صغيرة في القيمة المطلقة مقارنة بمرونة الدخل في الأجل الطويل.

4.10 تقدير نماذج الارتداد الزمنى:

سيتم مناقشة أهم نماذج الارتداد الزمني، وهي:

1.4.10 نموذج كويك، KOYCH:

يفترض كويك بأن أوزان المتغيرات المستقلة المرتدة زمنياً تتناقص تدريجياً بمتوالية هندسية حسب القانون الآتى:

$$B_{j} = B_{0} \lambda^{j}$$
 (j = 0, 1, 2,) ...(5.10)

 $0 < \lambda < 1$ حيث ان:

و λ هو معامل التباطؤ، ويُعرف بسرعة الاستجابة، ويوضح شرط المتوالية الهندسية السابقة، ان المعلمات B_i تتناقص بصورة مستمرة ، إذ ان $\lambda < 1$ فكلما بعد الزمن كلما قل تأثير المتغير المرتد الزمني على المتغير التابع. ويشتق نموذج كويك للارتداد الزمني ذو المتغيرات الداخلية من النموذج الأصلي الذي يحتوي على متغير خارجي مرتد زمنياً فقط ووفق الصيغة الآتية:

$$Y_1 = a + B_0 X_1 + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + ... + B_s X_{t-s} + U_t$$
 ... (6.10)

حيث ان:

$$U_i \sim N(0, \sigma_n^2)$$

وان B_i تتناقص تدريجياً بشكل متوالية هندسية أي ان:

$$B_{1} = \lambda B_{0}$$

$$B_{2} = \lambda^{2} B_{0}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$B_{i} = \lambda^{i} B_{0}$$

وبالتعويض في المعادلة (6.10):

$$Y_t = a + B_0 X_t + \lambda B_0 X_{t-1} + \lambda^2 B_0 X_{t-2} + ... + U_t$$
 ... (7.10)

وبجعل النموذج أعلاه مرتد لفترة زمنية واحدة فأن:

$$Y_{t-1} = a + B_0 X_{t-1} + \lambda B_0 X_{t-2} + \lambda^2 B_0 X_{t-3} + \dots + U_{t-1}$$
 ... (8.10)

وبضرب طرفي المعادلة في λ ، نحصل على:

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda a + \lambda B_0 X_{t-1} + \lambda^2 B_0 X_{t-2} + \lambda^3 B_0 X_{t-3} + \dots + \lambda U_{t-1} \qquad \dots (9.10)$$

وبطرح معادلة (9.10) من معادلة (7.10) نحصل على:

$$Y_{t} - \lambda Y_{t-1} = a - \lambda a + B_{0}X_{t} + U_{t} - \lambda U_{t-1}$$
 ...(10.10)

ويمكن ترتيبها كما يلى:

$$Y_{t} - \lambda Y_{t-1} = a(1-\lambda) + B_0 X_t + U_t - \lambda U_{t-1}$$
 ...(11.10)

وبالمناقلة والترتيب ، نحصل على:

$$Y_t = a(1-\lambda) + B_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t$$
 ...(12.10)

حيث ان:

$$V_{t} = (U_{t} - \lambda U_{t-1})$$

وهو حد الخطأ الجديد.

كما يمكن كتابة نموذج KOYCK بصورة مختصرة بعد حذف الحد الثابت، وكما يأتى:

$$Y_t = B_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + V_t$$

وتسمى هذه الصيغة بتحويلة، Transformation، كويك، وعليه فان تحويلة كويك أعــ لاه تستخدم فــي نقــ ل النموذج الأصلي والذي يحتوي على عدد لا نهائي من المتغــ يرات المستقلة المرتدة زمنياً إلى نموذج يحتوي على متغيرين مستقلين فقط هما X_t و Y_{t-1} كمــ ا تناقصــت عدد المعلمات التي يراد تقديرها من العدد اللانهائي في الــ نموذج الأصلي إلي ثلاث معلمات فقط في نموذج كويك المحول هي \hat{B}_0 ، \hat{B}_0 ، \hat{B}_0 معادلة كويك للحصول على المقدرات \hat{B}_0 \hat{B}_0 ثم نجري استعادة تقدير ات المعلمات الأصلية \hat{B}_0 بتطبيق القانون:

$$B_j = B_0 \lambda^j \qquad \dots (13.10)$$

$$(j = 0,1,2,...,\infty)$$

فعلى سبيل المثال:

At
$$j = 0$$
;

$$\hat{\mathbf{B}}_{0} = \hat{\mathbf{B}}_{0} \hat{\lambda}^{0}$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_{0} = \hat{\mathbf{B}}_{0} \qquad , \qquad \lambda^{0} = 1$$

At
$$j = 1$$
;

$$\hat{\mathbf{B}}_{_{1}}=\hat{\mathbf{B}}_{_{0}}\hat{\lambda}^{l}$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}}_1 = \hat{\mathbf{B}}_0 \hat{\lambda}$$

At j = 2;

$$\hat{\mathbf{B}}_{2} = \hat{\mathbf{B}}_{0} \hat{\lambda}^{2}$$

. .

$$\hat{\mathbf{B}}_{\infty} = \hat{\mathbf{B}}_{0} \hat{\lambda}^{\infty}$$

فإذا قدرنا على سبيل المثال المعادلة (12.10) كما يأتى:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i} = 64 + 0.3\mathbf{X}_{i} - 0.6\mathbf{X}_{i-1}$$
 ...(14.10)

عندئذ سنعتمد 3.0 B=0.3 عندئذ سنعتمد

$$\hat{a} = \frac{a}{(1-\hat{\lambda})} = \frac{64}{1-0.6} = 160$$

وعند تعويض هذه المعاملات في المعادلة (6.10)، يمكن الحصول على:

$$\hat{Y}_i = 160 + 0.3X_i + 0.18X_{i-1} + 0.108X_{i-2}$$
 ...(15.10)

استناداً إلى العرض السابق للنموذج، يمكن إثارة الملاحظات الآتية:

انسنا بدأنا بنموذج متغیرات مرتدة زمنیاً موزعة بصورة X_{t-1} نهائیة، غیر انه تحول X_{t-1} علی X_{t-1} علی X_{t-1} علی نموذج انحدار ذاتی لیا

- ان المتغير الستابع المرتد زمنياً يظهر ضمن المتغيرات المستقلة مما يخرق الفرض اللازم للحصول على مقدرات OLS المنادية بثبات قيم المتغيرات المستقلة في المعاينات المتكررة.
- ان حد الخطأ العشوائي الخاص بالنموذج الأصلي هو U_t بينما حد الخطأ الخاص بنموذج كويك المحول هو V_t فإذا كانت U_t الأصلية لا تترابط ذاتياً حسب فروض OLS فان V_t لا تحتفظ بتلك الخاصية.

ونتيجة لعشوائية Y_{t-1} وعدم استقلال V_t عن قيمها السابقة تنتهك فروض OLS العادية مما يقود إلى مقدرات متحيزة وغير متسقة لنموذج كويك المتخلف زمنياً.

2.4.10 نموذج التوقع المكيف لــCAGAN:

يقودنا هذا النموذج إلى بقاء الارتداد الزمني بشكل فعلي متطابق مع نموذج X^* كويك (6.10)، غير ان المتغير Y_t يعتمد على القيم المتوقعة أو الدائمة للمتغير وليست على القيمة الحقيقية لـX. لذلك يستخدم نموذج CAGAN للتوقع المكيف في السنموذج ذاتي الانحدار والذي يكون المتغير المستقل فيه له قيم متوقعة مثلى، ويمكن كتابة هذا النموذج بالصيغة الآتية:

$$Y_i = a + BX_i^* + U_i$$
(16.10)

حيث ان:

Y: تمثل الكمية المطلوبة من سلعة ما.

*X: تمثل السعر المتوقع للسلعة.

i : تمثل الزمن.

U: تمثل المتغير العشوائي.

ان التفسير الأكثر شيوعاً لـ X في النظرية الاقتصادية، أنه يمثل الدخل الدائم في نظرية فريدمان للاستهلاك، وكذلك في دالة الطلب على النقود، وبما ان X مجهولة، أي لا تستوفر علنها بيانات، لذلك نحتاج إلى كيفية تحديدها، وبالتالي فان المعادلة (16.10) لابد وان ترتبط ببعض الافتراضات عند تكوينها، والفرضية العامة لها هي التوقعات المكيفة التي تأخذ خطة دقيقة لتحديد قيمة X، وكما يأتي:

$$X_{i}^{*} - X_{i-1}^{*} = \mu(X_{i} - X_{i-1}^{*})$$
 ...(17.10)

 $0 \le \mu \le 1$ حيث أن

لذلك فأن الأفراد سيزيدون من مشترياتهم عندما يتوقعون ارتفاع الأسعار في المستقبل. وعلى افي افي الأسعار المتوقعة هي عبارة عن متوسط للأسعار المرجحة في الفترة الفترة الحالية والأسعار المتوقعة في الفترة الزمنية السابقة، أي ان:

$$X_{i}^{*} = \mu X_{i}^{*} + (1 - \mu) X_{i-1}^{*}$$
 ...(18.10)

وان قيمة μ تقع بين الصفر والواحد الصحيح، وهنا لابد من تحديد ما يأتي: أ- عندما تكون $\mu=1$:

وهذا يعني ان الأسعار المتوقعة تكون دائماً مساوية للأسعار الحقيقية، وتعرف بمعامل التوقع المكيف، Adjustment Coefficient of Expectation، وتعرف هذه الفرضية أيضاً بفرضية التوقع المتطرور، Progressive Expectation، او فرضية تعلم الخطأ Error Learning Hypothesis، إذ ان المعادلتين (17.10) و (18.10) تعرف على أنها فرضية التوقعات المكيفة.

فالمعادلة (17.10) تشير إلى ان الدخل الحقيقي في الفترة X_i ، يفوق الدخل المتوقع في الفترة السابقة X_{i-1}^* ، لذلك فان فكرة توقّع الدخل قد تُعدّل إلى الأعلى،

ومن ثم فان الدخل المتوقع في الفترة i ، i) يفوق الدخل المتوقع في الفترة السابقة X_{i-1}^* ، وان تحديد التعديل يعتمد على حجم معامل التوقع المكيف i الواقع بين الصفر والواحد الصحيح.

ب- عندما تكون μ = 1:

فــان التعديل يكون قد تم بسبب ان $X_i^* = X_i$ ، ولذلك يتطابق الدخل الحقيقي والدخل المتوقع.

: µ = 0 جـ- عندما

في هذه الحالة لا يحدث تعديل على الإطلاق، وان الدخل المتوقع يبقى بدون تغيير ويكون غير متأثر بالدخل الحقيقي مهما كان حجمها.

وبشكل عام، يمكن تحديد ما يأتي:

كلما كانت قيمة μ أكبر كلما كان امتداد التعديل اكبر، ويمكن ملاحظة ذلك، انه عهد التعويض في المعادلة (18.10) له $(X_{i-n}^*,...,X_{i-2}^*,...,X_{i-1}^*)$ يترتب عليه ما يأتى:

$$X_{i}^{*} = \mu X_{i}^{*} + (1 - \mu)\mu X_{i-1}^{*} + (1 - \mu)^{2} X_{i-2}^{*}$$

$$X_{i}^{*} = \mu X_{i}^{*} + (1 - \mu)\mu X_{i-1}^{*} + (1 - \mu)^{2} X_{i-2}^{*} + (1 - \mu)^{3} X_{i-3}^{*}$$

$$X_{i}^{*} = \mu X_{i}^{*} + (1 - \mu)\mu X_{i-1}^{*} + (1 - \mu)^{2} X_{i-2}^{*} + (1 - \mu)^{3} X_{i-3}^{*} + (1 - \mu)^{4} X_{i-4}^{*} \cdots (19.10)$$

وهكذا لتحديد الدخل المتوقع، فان معظم الأوزان قد أعطيت إلى الدخل الجاري X_{i} , وقد تم انحدار الأوزان بشكل ناجح إلى المستويات السابقة للدخل، X_{i-2} , X_{i-2} , X_{i-1} , نحصل على:

$$Y_i = a + B\mu[X_i + (1-\mu)X_{i-1} + (1-\mu)^2X_{i-2} + ...]$$
 ...(20.10)

حيث إن المعادلة (20.10) تتطابق مع المعادلة (6.10) لنموذج الارتداد الزمني لكويك، وان:

$$b = (1 - \mu)$$
, $B\mu = b$

وباستخدام تحويل CAGA بارتداد زمني لفترة واحدة، كما في المعادلة (20.10) أولاً وبضرب طرفي المعادلية في (μ) ثانياً. ثم بطرح النتيجة من المعادلة (20.10) نحصل على ما يلى:

$$Y_i = a\mu + B\mu X_i + (1-\mu)Y_{i-1} + U_i - (1-\mu)U_{i-1}$$
 ... (21.10)

وتأسيساً على ذلك، إذا توقعنا افتراض التوقعات المكيفة، فانه لتعديل معادلة التقدير (14.10) سوف نقترح ما يأتى:

$$1 - \hat{\mu} = 0.6$$

لان $\hat{\mu} = 0.4$ وان:

$$\hat{B} = \frac{0.3}{\hat{\mu}} = \frac{0.3}{0.4} = 16$$

وهكذا يمكن تقدير العلاقات السلوكية للمعادلة (16.10) كما يأتى:

$$\hat{Y}_{i} = \hat{a} + \hat{B} X_{i}^{*} + e_{i}$$

$$\hat{Y}_{i} = 160 + 0.75 X_{i}^{*} \qquad \dots (22.10)$$

وان معامل التعديل المكيف في معادلة التوقعات المعدلة (17.10) هو 0.4، هذه القيمة يمكن استخدامها بأنها تمثل 40% لأي اختلاف بين الدخل الحقيقي والدخل المتوقع.

	Y	
1	30.6	125
2	31.6	140
3	31.3	130
4	33.3	155
5	33.5	145
6	33.2	163
7	36.7	170
8	38.6	182
9	39.0	173
10	40.8	192
11	42.7	203
12	41.9	178
13	40.2	163
14	40.7	182
15	40.4	175

المطلوب: تقدير المعادلة (16.10)، وكيف يمكن إيجاد السعر المتوقع للسلعة X؟

الحل:

أ- X_i أ- X_i أ- X_i أعلاه، بسبب ان قيمة ليمكن تقدير المعادلة (16.10) من البيانات في الجدول أعلاه، بسبب ان قيمة X_i

 $ilde{ ilde{X}}_{i}^{*}$ من خلال الخطوات الآتية:

1- باستخدام طريقة OLS وتطبيقها على المعادلة (21.10) نحصل على:

$$\hat{Y}_i = 1.95825 + 0.0805855X_i + 0.598679Y_{i-1}$$

$$\therefore (1 - \hat{\mu}) = 0.598679$$

$$\hat{\mu} = 1 - 0.598679$$

$$\hat{\mu} = 0.401321$$

$$\hat{a}\hat{\mu} = 1.95825$$

$$\hat{a} = \frac{1.95825}{\hat{\mu}}$$

إذن:

وان:

$$\therefore \hat{a} = \frac{1.95825}{0.401321} = 4.87951$$

و ان:

$$\hat{B}\hat{\mu} = 0.0805855$$

$$\hat{B} = \frac{0.0805855}{\hat{\mu}}$$

$$\therefore \hat{\mathbf{B}} = \frac{0.0805855}{0.401321} = 0.20080$$

وباستخدام المعادلة (16.10)، يمكن إيجاد قيمة X_i^* ، وكما يأتي:

$$Y_i = a + BX_i^* + U_i$$

 $\hat{Y}_i = \hat{a} + \hat{B}X_i^* + e_i$...(23.10)

وبإعادة ترتيب (23.10) أعلاه، نحصل على:

$$\hat{B}X_{i}^{*} = Y_{i} - \hat{a}$$

وبقسمة طرفي المعادلة على $\hat{\mathbf{B}}$ ، نحصل على:

$$X_i^* = \frac{Y_i - \hat{a}}{\hat{\mathbf{p}}}$$

وبتعويض قيم (Yi) الواردة في الجدول، نحصل على:

$$X_1^* = \frac{30.6 - 4.87951}{0.20080} = 128.1$$

$$X_2^{\bullet} = \frac{31.6 - 4.87951}{0.20080} = 133.1$$

$$X_3^* = \frac{31.3 - 4.87951}{0.20080} = 131.6$$

وهكذا نحصل على بقية قيم X_i^* من الجدول السابق.

$$X_{15}^* = \frac{40.4 - 4.87951}{0.20080} = 176.9$$

3.4.10 نموذج التعديل الجزئي لــ "نيرلوف" Nerlov's

يفترض نيرلوف ان المستوى المرغوب للمتغير (Y) في الفترة الزمنية (t) يعتمد على قيمة (X) في الفترة الزمنية (t)، مضافاً إليه المتغير العشوائي (t)، وبذلك يعتمد على قيمة (t) في الفترة الزمنية (t) قيمة متوقعة مثلى حيث يمكن ان نرمز له بالرمز (Y_t^*) وكما في النموذج الآتي:

$$Y_t^* = B_0 + B_1 X_t + U_1$$
 ...(24.10)

حيث ان:

*Y: تمثل الرصيد الأمثل او المخطط لرأس المال.

:Xt تمثل الناتج.

نمثل المتغير العشوائي. U_t

t: الفترة الزمنية.

وبموجــــب نمـوذج التعديل الجزئي لنيرلوف او ما يسمى بنموذج تعديل الرصيد The Stock Adjustment Model (Y_t^*) يمثل في حقيقته التغير المتحقق في خزين رأس المال في كل فترة، لذلك الأمثل (Y_t^*) يمثل في حقيقته التغير المتحقق في خزين رأس المال في كل فترة، لذلك مــن الطبيعي ان Y_t و (Y_t^*) ليست نفسها، بمعنى آخر فان تعديل (Y) الحقيقية إلى التغيير فــي (X) لا يحصــل بشكل فوري بل ربما يكون حصيلة التقدم التكنولوجي والقـرارات الإداريــة والمالية التي تقدم عليها المنشأة أو الدولة في مجال الاستثمار، وعليه فان معادلة التعديل تأخذ الصيغة الرياضية الآتية:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda (Y_t^* - Y_{t-1}) + V_t$$
 ...(25.10)

 $0 < \lambda < 1$

اقستراب او ابستعاد Y_t الحالسية عن السابقة Y_{t-1} ، وتتراوح قيمتها بين الصفر والواحد الصحيح.

:Y_t-Y_{t-1} تمثل التغير الفعلى.

نمثل التغير المرغوب فيه. $Y_t^* - Y_{t-1}$

 V_t : تمثل حد الخطأ.

وبطرح معادلة (24.10) من معادلة (25.10) نحصل على:

$$Y_t - Y_{t-1} = \lambda [(B_0 + B_1 X_t + U_t) - Y_{t-1}] + V_t$$
 ... (26.10)

وبفك الأقواس والترتيب، نحصل على:

$$\boldsymbol{Y}_{t} - \boldsymbol{Y}_{t-1} = \lambda \, \boldsymbol{B}_{0} + \lambda \boldsymbol{B}_{1} \boldsymbol{X}_{t} - \lambda \boldsymbol{Y}_{t-1} + \lambda \boldsymbol{U}_{t} + \boldsymbol{V}_{t}$$

$$Y_{t} = \lambda B_{0} + \lambda B_{1} X_{t} + Y_{t-1} - \lambda Y_{t-1} + \lambda U_{t} + V_{t}$$

$$Y_{t} = \lambda B_{0} + \lambda B_{1} X_{t} + (1 - \lambda) Y_{t-1} + (\lambda U_{t} + V_{t}) \qquad ... (27.10)$$

هذه المعادلة توضح ان (Y_t) الرصيد من رأس المال في الفترة (t) يعتمد في جزء مسنه على مستوى الإنتاج في تلك الفترة (X_t) وفي الجزء الآخر على التوسع في الرصيد، كما وان درجة التعديل والسرعة التي تمكن تعديل (Y) إلى (X) عبر الفترة الزمنية تعتمد على حجم معامل التعديل (λ) ، فكلما كانت (λ) اكبر كلما كانت سرعة التعديل اكثر، أي يتساوى رأس المال الحالي مع رأس المال المرغوب فيه، وكلما كانت اصغر كلما صغر التعديل في الفترة الجارية، مما يدل على اقتراب رأس المال القائم من السابق، فعندما (λ) معنى ذلك ان الرصيد الحقيقي لرأس المال

سوف يكون دائماً مساوياً للرصيد المخطط منه، وعندما تكون $\lambda=0$ فان $Y_{t-1}Y_{t-1}$ و لا يكون هناك أي تعديل على الإطلاق.

وبمقارنة نموذج نيرلوف (معادلة 27.10) مع نموذج كويك (معادلة 12.10) يتضــح بان كلاهما يحتويان على المتغيرات نفسها $(Y_{t-1},X_t,\ Y_t)$ غير ان حد الخطأ فــي نموذج نيرلوف لا يحتوي على أي شكل من أشكال التعدد الخطي كما هو الحال في نموذج كويك، كما ان حد الخطأ $(\lambda U_t + \lambda V_t)$ لا يرتبط خطياً.

مثال 3.10: إذا توفرت لديك البيانات الآتية:

الفترة	الأنفاق الاستثماري المنعطط	المبيعات
	Y	$\mathbf{X_i}$
1	10	20
2	9	19
3	10	21
4	11	23
5	13	25
6	20	27
7	24	30
8	19	32
9	24	34
10	26	40

المطلوب: تقدير معلمات نموذج التعديل الجزئي قصيرة وطويلة الأجل لدالة الطلب على الأنفاق الاستثماري.

الحل: نتبع الخطوات الآتية:

أ- صياغة نموذج التعديل، كما جاء في المعادلة (27.10)، وهي:

$$Y_{t} = \lambda B_{0} + \lambda B_{1} X_{t} + (1 - \lambda) Y_{t-1} + (\lambda U_{t} + V_{t})$$

ب- تطبيق طريقة OLS على المعادلة اعلاه، مستخدماً البيانات في الجدول أعلاه ومنها نحصل على:

$$\hat{\mathbf{Y}}_{t} = -7.33 + 0.095\mathbf{X}_{t} + 0.83\mathbf{X}_{t-1}$$

وتمثل هذه الدالة دالة الطلب قصيرة الأجل. ولإيجاد قيم B_1 ، B_0 نتبع ما يأتي:

$$(1 - \hat{\lambda}) = 0.83$$
$$\therefore \hat{\lambda} = 1 - 0.83 = 0.17$$

$$\lambda \hat{\mathbf{B}}_0 = -7.33$$

وان:

$$\hat{B}_0 = \frac{-7.33}{0.17} = -43.12$$

$$\lambda \hat{\mathbf{B}}_1 = 0.095$$

وان:

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \frac{0.095}{0.17} = -0.5588$$

ومن ثم يمكن تقدير دالة الطلب في الأجل الطويل وكما يأتي:

$$Y_t = -43.12 - 0.5588 X_t$$

4.4.10 نموذج الارتداد الزمني متعد الحدود لـــ"ألمون" ALMON:

يفترض ألمون ان معلمات النموذج المقدرة B_i تأخذ شكل التوزيع متعدد الحدود. فقد افترض ألمون ان أقصى ارتداد زمني هو (m)، أي:

$$Y_t = a + B_0 X_t + B_1 X_{t-1} + B_2 X_{t-2} + ... + B_m X_{t-m} + U_t$$
 ...(28.10)

$$Y_{t} = a + \sum_{i=0}^{m} B_{i}X_{t-i} + U_{t}$$

وان B_i تتوقف على درجة الحدود، فمثلاً بافتراض أربع فترات ارتداد، فان الصياغة تكون:

$$Y_{t} = a + B_{0}X_{t} + B_{1}X_{t-1} + B_{2}X_{t-2} + B_{3}X_{t-3} + B_{4}X_{t-4} + U_{t} \qquad ...(29.10)$$

$$B_{i} = C_{0} + C_{1i} + C_{2i}^{2} + C_{3i}^{3}$$

وبالتعويض في المعادلة (28.10) نحصل على:

$$Y_{t} = a + C_{0}X_{t} + (C_{0} + C_{1} + C_{2} + C_{3})X_{t-1} + (C_{0} + 2C_{1} + 4C_{2} + 8C_{3})X_{t-2} + (C_{0} + 3C_{1} + 9C_{2} + 27C_{3})X_{t-3} + (C_{0} + 4C_{1} + 16C_{2} + 64C_{3})X_{t-4} + U_{t}$$

وبإعادة ترتيب الحدود، نحصل على:

$$Y_{t} = a + C_{0}(\sum_{i=0}^{4} X_{t-i}) + C_{1}(\sum_{i=0}^{4} i X_{t-i}) + C_{2}(\sum_{i=0}^{4} i^{2} X_{t-i}) + C_{3}(\sum_{i=0}^{4} i^{3} X_{t-i}) U_{t}$$

وإذا رمزنا للمتغيرات المستقلة الجديدة بالرموز الآتية Z_{3t} ، Z_{3t} ، Z_{3t} على الترتيب، نحصل على:

$$Y_t = a + C_0 Z_{1t} + C_1 Z_{2t} + C_2 Z_{3t} + C_3 Z_{4t} + U_t$$
 ...(30.10)

وتعد المعادلة (30.10) انحدار متعدد منظم، وان التقديرات التي نحصل عليها لقيم C_4 ، C_3 ، C_5 ، C_6 0، C_7 0، C_8 0، $C_$

ويجب هنا ملاحظة تحديد كل من درجة الحدود وطول فترة الارتداد الزمني قبل البدء بتطبيق طريقة ألمون ويلاحظ هنا ان المعادلة (29.10) تستخدم فقط لتحديد المعلمات للنموذج لقيم (i) من الصفر إلى (m)، اي ان (i=0,1,2,3,...,m) وان معلمات نموذج الارتداد الزمني خارج هذا المجال يمكن تحديدها بان نساويها بالصفر. وعند مقارنة نموذج ألمون للارتداد الزمني مع نموذج كويك للارتداد الزمني نحصل على ميزتان هامتان:

الأولىي: ان لنموذج ألمون هيكل ارتداد زمني مرن على عكس هيكل الارتداد الزمني الجامد لنموذج كويك.

الثانية: ان نموذج ألمون لا يستبدل متغيرا تابعاً مرتداً زمنياً بالمتغيرات المستقلة المرتدة زمنياً، فانه لا يخرق أياً من فروض OLS كما يفعل نموذج كويك. أما عيوب نموذج ألمون، فهي:

- ان عدد المعلمات اللازم تقديرها لا ينخفض كثيراً كما يحدث في نموذج كويك.
- أنه في الواقع العملي قد لا نستطيع تحديد فترة الارتداد الزمني عن طريق النظرية او بمعلومات مسبقة.

الأسطلة والتمارين

السؤال 1.10: ميز بين طريقة KOYCK وطريقة ALMON فيما يتعلق بالأرتداد الزمني للتغيرات، ثم حدد أيهما افضل عندما تكون سنوات التخلف (10 سنة) (n=25).

السؤال 2.10: افترض لدينا دالة الاستهلاك الآتية:

$$C_t = a + B_0 Y_t + B_1 Y_{t-1} + B_2 Y_{t-2} + U_t$$

وكانت المعادلة التقديرية لها هي:

$$\hat{C}_t = 15 + 0.6Y_t + 0.9Y_{t-1} + 0.5Y_{t-2} + e_t$$

المطلوب:

أ- أيجاد متوسط (معدل) الارتداد الزمني.

ب- ما هو الأثر القصير والطويل الأجل على الأنفاق الاستهلاكي.

- السوال 3.10: ضع علامة صبح () أو خطأ (X) أمام العبارات الآتية مع تصحيح العبارة الخاطئة:
- أ- عندما تكون فترات الارتداد الزمني كبيرة نسبة إلى حجم العينة المدروسة سوف تقع في مشكلة درجات الحرية وبذلك يصبح من الصعب الحصول على تحديد مقدرات دقيقة لمعلمات النموذج.
 - ب- ان من أسباب الارتداد الزمني هو أسباب نفسية وليست فنية.
- جـــ ان الارتداد الزمني يعود إلى التشريع الحكومي والتي تساهم في التخلف الزمني للمتغيرات.

- د- يفترض نموذج كويك ان المتغيرات المستقلة تكون سالبة وتتصاعد هندسياً مع الزمن.
- هــــ ان فقدان مشاهدة واحدة عند إجراء عملية التقدير نتيجة الارتداد الزمني برضي الشرط الأول للتقدير.
 - و- يطلق على نموذج التعديل الجزئي لنيرلوف بنموذج تعديل الرصيد.
 - ز يأخذ المتغير التابع في نموذج نيرلوف قيمة متوقعة مثلى.
 - ح- نطلق على $e_i = \lambda U_i$ باصطلاح نموذج التعديل الجزئي لنيرلوف.
- ط-عند وجود نقطة واحدة من نقاط الانقلاب في نموذج الارتداد الزمني متعدد الحدود للمون فأنه يأخذ شكل متعدد الحدود من الدرجة الثانية.

السؤال 4.10: ان مستوى الاستهلاك الجاري يتأثر بالدخل الجاري ومستويات الدخول في السنوات السابقة، ويمكن عرض ذلك رياضياً وكما يأتي:

$$C_t = f(Y_t, Y_{t-1}, Y_{t-2}, Y_{t-3}, ..., Y_{t-n})$$

المطلوب:

- أ- اشتق رياضياً أفضل نموذج لدالة الاستهلاك معتمداً نموذج كويك.
 ب- ما هي فرضيات نموذج كويك.
- السؤال 5.10: بيّن أهم الصعوبات التي تواجه الباحث عند بناء نموذج تقديري لنموذج يحتوي على n من فترات الارتداد الزمني.
- السوال 6.10: ما المقصود اقتصادیاً بنماذج الارتداد الزمني، وما هي الصیغة الریاضیة العامة لها عندما یکون لدیك هناك (n) من فترات الارتداد الزمني.

السوال 7.10: هل يكون هناك عدد لانهائي (∞) من فترات الارتداد الزمني في نماذج الارتداد الزمني، وهل يكون ذلك مقبولاً اقتصادياً.

الفصل الحادي عشر: المتغيرات الوهمية Dummy Variables

- 1.11 المقدمة.
- 2.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي مستقل واحد.
- 3.11 نموذج الانحدار المتضمن أكثر من متغير وهمي مستقل.
 - 4.11 نموذج الانحدار المتضمن متغير وهمي تابع.
 - 5.11 الأسئلة والتمارين.

الفصل الحادي عشر: المتغيـــرات الوهميـــة Dummy Variables

1.11 المقدمــــة:

تضمنت الطرق التي تعرضنا لها في الفصول السابقة استعمال متغيرات السعر، اقتصمادية يجري قياسها كمياً وتتوفر عنها بيانات إحصائية مثل متغيرات السعر، الصادرات، الاستهلاك، الكمية المطلوبة والمعروضة...الخ، غير أنه قد تواجه الباحث أحياناً كثير من المتغيرات لا تتوفر عنها إحصائيات كمية، وقد تكون ضمن مجموعة المتغيرات المستقلة او قد تظهر كمتغير تابع على الجانب الأيمن من النموذج المراد قياسه، وتعرف تلك المتغيرات بالمتغيرات النوعية، Qualitative Variables، او المتغيرات الوهمية، Dummy Variables، وتعبر عن صفة معينة كالجنس، المتغيرات الوهمية، الإنزل، الإضراب وغيرها من الصفات ويتخذ المتغير الوهمي (النوعي) قيمتين فقط (1، صفر)، القيمة واحد للدلالة على وجود الصفه والقيمة صفر للدلالة على عدم وجودها.

تعد المتغيرات الوهمية ذات أهمية بالغة وكبيرة، فالعلاقات الاقتصادية لا تعتمد على متغيرات يمكن قياسها فقط، بل تعتمد فضلاً عن ذلك على متغيرات وهمية. فالاستهلاك مثلاً لا يتوقف على مستوى الدخل لوحده، بل يتوقف على ما إذا كان البلد في وقت الحرب، War time، أو في وقت السلم Peace time، كذلك الحال بالنسبة للطلب على سلعة ما لا تتوقف على الدخل وحده، بل يعتمد على متغيرات أخرى غير الدخل كذوق المستهلك يتبع ذلك تغيير في الكميات المطلوبة من تلك السلعة، لذلك لابد من إدخال المتغيرات الوهمية المتعلقة بذوق المستهلك إلى النسبة لبقية النماذج المستهلك إلى النسبة لبقية النماذج

الاقتصادية الأخرى.

2.11 نموذج الاتحدار المتضمن متغير وهمي مستقل واحد:

في هذه الحالة يظهر المتغير الوهمي كمتغير مستقل ضمن مجموعة المتغيرات المستقلة، وغالباً ما تظهر تلك المتغيرات في الدراسات التي تعتمد السلاسل الزمنية كقاعدة بيانية وذلك نتيجة لحدوث تغيرات هيكلية كبيرة في مسار الاقتصاد، كما قد تظهر في الدراسات التي تستخدم البيانات المقطعية نتيجة لعدم تماثل الظروف الذاتية والموضوعية بين مختلف الوحدات الاقتصادية المشمولة في العينة.

فعلى سبيل المثال، نتوقع ان تنخفض مستويات ومعدلات الاستهلاك الخاص في دولة ما إذا ما مرت تلك الدولة بظرف طارئ مثل فترات الحرب او الجفاف وذلك مقارنة مسع فترات السلم او الازدهار والتي غالباً ما ترتفع فيها مستويات ومعدلات الاستهلاك، عليه يصبح من الممكن إدخال متغير مستقل إضافي جديد لدالة الاستهلاك بجانب الدخل ليفسر الفرق بالاستهلاك بين فترتي السلم والحرب، ويتم إعطاء قيمتين لذلك المتغير ليتخذهما في فترتي السلم والحرب، ويمكن التعبير عن نموذج الاستهلاك أعلاه كالآتي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 D_t + U_t$$
 ...(1.11)

إذ ان:

نمثل الأنفاق الاستهلاكي الخاص. C_t

· Y: تمثل الدخل.

:Dt تمثل المتغير الوهمي وتأخذ القيم:

 $D_t = 0$: في وقت السلم.

 $D_t = 1$: في وقت الحرب.

 U_t : تمثل المتغير العشوائي.

فدالة الاستهلاك في وقت السلم تأخذ الصيغة الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + U_t$$

وذلك من خلال التعويض $D_t = 0$ في المعادلة (1.11).

أما في وقت الحرب فان الدالة تأخذ الصيغة الآتية:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2(1) + U_t$$

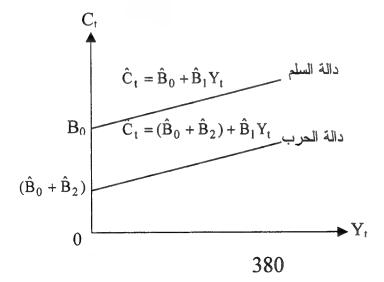
 $C_t = B_0 + B_2 + B_1 Y_t + U_t$
Or:

 $C_t = (B_0 + B_2) + B_1 Y_t + U_t$

فخـــلال فترة الحرب، يكون الاستهلاك اقل من فترة السلم بسبب القيود ونقص المتاح مــن السلع والخدمات عليه فأن B_2 (معامل D_t) من المتوقع ان تكون سالبة لسنوات الحرب بحيث يكون المقطع و/أو الميل اقل في معادلة الحرب عنها في معادلة سنوات السلم. ويمكن توضيح هذه الحالات بالأشكال الآتية:

أ- تغير المقطع، ويمكن توضيح ذلك في الشكل (1.11).

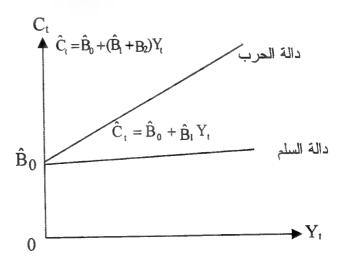
الشكل (1.11): تغير الحد الثابت في دالة الاستهلاك



ان الشكل (1.11) يوضح تغير المقطع فقط حيث يكون المقطع في دالة استهلاك المحرب اسفل من دالة استهلاك السلم.

ب- تغير ميل دالة الاستهلاك، ويمكن توضيح ذلك كما في الشكل (2.11).

الشكل (2.11): تغير ميل دالة الاستهلاك

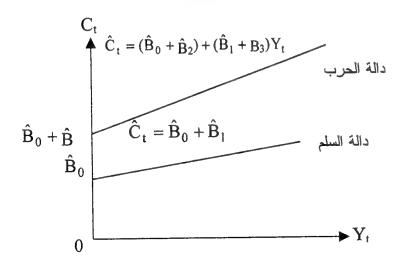


ان الشكل (2.11) يوضح تغير الميل حيث ان ميل دالة الاستهلاك ترتفع في فترات السلم عنه في فترات الحرب مع بقاء المقطع ثابت. ان الدالة الأصلية، هي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 Y_t D_t + U_t$$

ج___ تغير الميل والحد الثابت لدالة الاستهلاك، ويمكن توضيح ذلك في الشكل (3.11).

الشكل (3.11): تغير الميل والحد الثابت لدالة الاستهلاك



ان الشكل (3.11)، يوضح تغير المقطع والميل معا فالدالة الأصلية، هي:

$$C_t = B_0 + B_1 Y_t + B_2 D_t + B_3 Y_t D_t + U_t$$

هذا ويمكن تعميم الحالة بحيث يشمل نموذج الانحدار الواحد على العديد من المتغيرات الوهمية المستقلة، فمثلاً بافتراض النموذج الآتي:

$$Y_t = B_0 + B_1 D_{i1} + B_2 D_{i2} + U_i$$

إذ ان:

:Yi تمثل مستوى دخل الفرد.

:D₁ تمثل شهادة الدكتور اه.

:D2 تمثل شهادة الماجستير.

المقطع الصادي. B_0

الذي يفسر أثر شهادة الدكتوراه على متوسط D_1 الذي يفسر أثر شهادة الدكتوراه على متوسط دخل الفرد.

نمسئل مديل المتغير الوهمي D_2 الذي يفسر أثر شهادة الماجستير على B_2 متوسط دخل الفرد.

جدول (1.11): العلاقة بين دخل الفرد وعدد السكان وسنوات التعليم

ت	دخال القرد ٧	عد اسكان X ₁₁	عدد سنوات التعليم X ₁₂	الجنس D _i
	Yi		9	1
1	1000	80		1
2	2000	95	8	1
3	3000	100	10	1
4	4000	101	10	1
5	5000	103	11	1
6	6000	115	14	1
7	7000	105	15	1
8	8000	116	13	0
9	9000	120	16	0
10	10000	110	17	0

المطلوب: معرفة أثر نوع الجنس على دخل الفرد، بافتراض ان نموذج الانحدار الخطى المتعدد المراد تقديره، هو:

$$Y_i = B_0 + B_1 X_{1i} + B_2 X_{2i} + B_3 D_i + U_i$$

إذ ان: i =1,2,...,n وأن:

تمثل الجنس وتكون $D_i=1$ إذا كان الجنس أنثى و $D_i=0$ إذا كان الجنس ذكر.

Bo: تمثل الحد الثابت.

الفرد. واحدة على دخل الفرد. B_1

. تمثل أثر التغير في سنوات التعليم بوحدة واحدة على دخل الفرد ${
m B}_2$

B3: تمثل الحد الثابت التفاضلي ويقيس أثر الجنس على دخل الفرد.

الحلى: نأخذ دالة الدخل المقدرة، عندما يكون الجنس ذكر، وكما في الشكل الآتي:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2 + e_i$$

ويكون شكل دالة الدخل المقدرة، عندما يكون الجنس أنثى وكما يأتي: $\hat{Y}_i = (\hat{B}_0 + \hat{B}_3) + \hat{B}_1 X_1 + \hat{B}_2 X_2 + e_i$

وبتطبيق طريقة OLS على المعادلة المراد تقديرها، نحصل على ما يلى:

$$\hat{Y}_i = -7327.01 + 66.121X_1 + 567.463X_2 - 1517.698D$$

ومن هذه المعادلة التقديرية نستطيع تحديد ما يأتي:

: $D_1 = 0$ أ- معادلة الدخل المقدرة عندما يكون الجنس ذكر ، أي

$$\hat{Y}_i = -7327.01 + 66.121X_1 + 567.463X_2$$

 $:D_1 = 1$ $:D_1 =$

$$\hat{\mathbf{Y}}_{i} = [(-7327.01) + (-1517.698)] + 66.121X_{1} + 567.463X_{2}$$

$$\hat{Y}_i = -8844.708 + 66.121X_1 + 567.463X_2$$

نستنتج من ذلك ان الأنثى تحقق دخلاً أقل من دخل الرجل بمقدار 1518 دينار تقريباً.

3.11 نموذج الاتحدار المتضمن اكثر من متغير وهمي مستقل:

لغـــرض تقدير وتوضيح معامل الانحدار في حالة تضمين النموذج على متغيرين وهميين مستقلين نأخذ المثال الآتي:

مثال 2.11: افترض انه قد توفرت لدينا البيانات الآتية عن دخل الفرد ومستوى التعليم حسب الشهادة وكما في الجدول (2.11).

جدول 2.11: العلاقة بين الدخل ومستوى التطيم (ماجستير، دكتوراه)

ے	النفان، ۲۱	نکتوراه، D _{II}	\mathbf{D}_{2i} ، ماجستیر
1	1000	0	0
2	2000	0	0
3	3000	0	0
4	4000	0	1
5	5000	0	1
6	6000	0	1
7	7000	0	0
8	8000	1	0
9	9000	1	0
10	10000	1	0

وأن نموذج الانحدار المراد تقديره، يأخذ الصيغة الآتية:

$$Y_i = B_0 + B_1 D_{1i} + B_2 D_{2i} + U_i$$

إذ ان:

نمثل شهادة الدكتوراه وتكون قيمها: D_1

انسبة لشهادة الدكتوراه. $D_1 = 1$

 $D_1 = 0$: بالنسبة لشهادة الماجستير والبكالوريوس.

:D2 تمثل شهادة الماجستير وتكون قيمها:

. بالنسبة لشهادة الماجستير $D_2 = 1$

. بالنسبة لشهادة الدكتوراه والبكالوريوس. $D_2=0$

B₀: تمثل الحد المطلق.

الذي يقيس الله المتغير الوهمي D_1 الذي يقيس الله شهادة الدكتوراه على متوسط دخل B_1

الفرد.

الذي يقيس اثر شهادة الماجستير على متوسط دخل B_2 الذي يقيس اثر شهادة الماجستير على متوسط دخل الفرد.

نمثل المتغير العشوائي. U_i

ويمكن تقدير النموذج المراد تقديره باستخدام طريقة OLS، ونحصل على:

$$\hat{Y}_{i} = \hat{B}_{0} + \hat{B}_{1}D_{1} + \hat{B}_{2}D_{2} + e_{i}$$

أي ان:

$$\hat{Y}_i = 3666.67 + 5333.33D_1 + 1333.33D_2$$

ولتفسير مضامين هذه النتائج، نتبع ما يأتي:

أ- ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة البكالوريوس، عندما $D_1 = D_2 = 0$ ، هو:

$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 = 3666.67$$
 دينار

ب- ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة الماجستير، عندما $D_1=0$ ، هو:

$$\hat{Y}_i = (\hat{B}_0 + \hat{B}_2) = 3666.63 + 1333.33$$

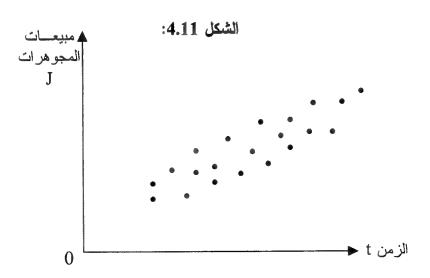
$$\hat{\mathrm{Y}}_{\mathrm{i}} = 5000$$
 دينار

جــ – ان متوسط دخل الفرد ومن حملة شهادة الدكتور اه عندما $D_2=0$ ، هو:

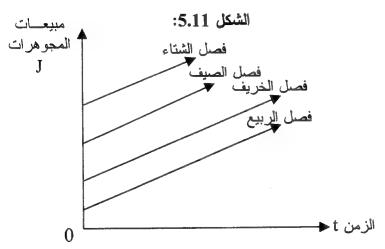
$$\hat{Y}_i = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 = 3666.63 + 1333.33$$

 $\hat{Y}_i = 9000$ دينار

وباستخدام الأسلوب نفسه، يمكن تقدير معاملات الانحدار عندما يكون عدد المتغيرات الوهمية المستقلة اكثر من متغيرين كما هو مبين في الشكل (4.11) بافتراض ان بائع المجوهرات يعتمد بشكل كبير على موسم الوقت من السنة، إضافة إلى اتجاه الزمن ولدينا بيانات فصلية لمبيعات المجوهرات.

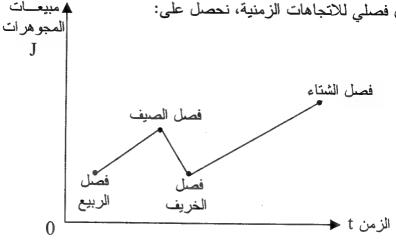


ويمكن رسم العلاقة الانتشارية بيانياً، إذ يلاحظ من الشكل ان هناك اتجاه واضح إلى الأعلسي. ولكن عند رسم بيانات سنة معينة تبين ان لها نمط موسمي seasonal بمكن توضيحها في الشكل 5.11.



ومن الشكل 5.11 يتبين ان أعلى قيمة للمبيعات هي في فصل الشتاء، إذ أنها تعد فترة

انتعاش المبيعات لطبيعة الفصل وما يتضمنه من مناسبات، كالأعياد مثلاً، وعند رسم ذلك بشكل فصلى للاتجاهات الزمنية، نحصل على:



ولكن قد يتبادر إلى الذهن هنا، هل نستطيع استخدام المتغيرات الوهمية هنا، ولغرض الإجابة على ذلك، لابد من تحديد عدد المتغيرات الوهمية، وهنا ستكون ثلاثة لأن لدينا أربعة مواسم للمبيعات، أي ان 3 = 1 - 4، إذ ان واحد من هذه المتغيرات يمثل الأساس و 3 = 1 - 4 متغيرات متغيرة.

وبافتراض أننا نأخذ فصل الربيع كأساس، ثم نقدم ثلاث متغيرات وهمية هي D_3 و D_3 و ان القيم التي تأخذها هذه المتغيرات تتوقف على الفصل، ويمكن بيان ذلك كما في الجدول الآتي:

جدول 3.11: فصول السنة والمتغيرات الوهمية

\mathbf{D}_3	$\mathbf{D_2}$	$\mathbf{D_{l}}$	القصيل
0	0	0	الربيسع
1	0	0	المريف
0	1	0 .	الخريف
0	0	1	الثبيتاء

ومن ثم فأن أول خمسة فصول لمبيعات المجوهرات كانت كما في الجدول (4.11).

جدول (4.11)

\mathbf{D}_3	D ₂	D_1	مبيعات المجوهرات	وقت الفصل
0	0	0	36	1
1	0	0	44	2
0	1	0	45	3
0	0	1	106	4
0	0	0	35	5

وبذلك يمكن استخدام نموذج الانحدار الخطي المتعدد والذي يأخذ الصيغة الآتية:

$$\mathbf{J} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{T} + \mathbf{B}_2 \mathbf{D}_1 + \mathbf{B}_3 \mathbf{D}_2 + \mathbf{B}_4 \mathbf{D}_3 + \mathbf{U}_{\mathrm{i}}$$

إذ ان:

D₁: تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الصيف.

:D2 تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الخريف.

D₃: تمثل الانتقال من فصل الربيع إلى فصل الشتاء.

4.11 نموذج الاتحدار المتضمن متغير وهمي تابع:

$$D_{i} = B_{0} + B_{1}X_{i} + U_{i} \qquad ... (2.11)$$

إذ ان:

:X; تمثل دخل الشخص.

ا: إذا كان الشخص يملك منز $D_i = 1$

اذا كان الشخص لا يملك منزلاً. $D_i=0$

فالمتغير التابع الوهمي D_i يعتمد على المتغير المستقل X_i والنموذج أعلاه كأي نموذج آخــر للانحدار، يمكن تقدير معلماته بواسطة طرق المربعات الصغرى العادية ولكن تظهر بعض المشاكل، منها:

أولاً: حـــد الخطأ ،U لا يتبع التوزيع الطبيعي، وهذا يخالف فرض نموذج الانحدار الخطــي البسيط، OLS، المطلوب لإجراء اختبارات معنوية المعلمات. ويمكن ملحظة ذلك بإعادة كتابة المعادلة (2.11) كالآتى:

$$U_i = D_i - B_0 - B_1 X_i$$

فإذا كانت $D_i = 0$ ، فأن:

 $U_i = -B_0 - B_1 X_i$

أما إذا كانت D_i = 1، فأن:

 $U_i = 1 - B_0 - B_1 X_i$

أي ان U_i تستخذ قيمتيسن ورغم ذلك فأنه يمكن اللجوء إلى نظرية النهاية المركزية للعيسنات الكبيرة ($n \geq 30$) لغرض الحصول على سند نظري يتيح إجراء اختبارات الفروض في هذه النماذج.

ثانياً: عنصر الخطأ Ui يرتبط بقيم المتغيرات المستقلة ويؤدي هذا إلى مقدرات غير كفوءة أي ان المقدرات لا تتصف بكونها تمثلك اصغر تباين، ويمكن التغلب على هذه المشكلة بتصحيح النموذج الأصلي من خلال استخدام تحويلة مناسبة تقلل من حدة المشكلة.

ثالثاً: ان القيم المقدرة للمتغير التابع D_i قد تأخذ قيماً خارج المدى من الصغر إلى D_i ويمكن التغلب على هذه المشكلة باستعمال إحدى وسائل التقدير التي تحصر قيم \hat{D}_i داخل المدى من D_i الى D_i منها الدالة الطبيعية التراكمية (نموذج بروبت، \hat{D}_i)، الدالة اللوجيتية (نموذج لوجت، Logit) وهي أساليب للتقدير تعرض في كتب القياس الاقتصادي الأكثر تقدماً.

مسثال 3.11: بافتراض إننا نرغب في دراسة العلاقة بين الفقر، Poverty، كمتغير تابع D_1 والجنس، D_2 ، واللون، D_3 ، كمتغيرات وهمية مستقلة، وان بيانات هذا السنموذج مبيسنة فسي الجدول (5.11)، وبافتراض ان نموذج الانحدار الخطي المتعدد المراد تقديره، يأخذ الصبيغة الآتية:

$$D_{1i} = B_0 + B_1 D_{2i} + B_2 D_{3i} + U_i \qquad ... (3.11)$$

إذ ان:

تمثل الفقر كمتغير وهمي تابع يأخذ القيمتين: D_1

. الفقر $D_1 = 1$

لغير ذلك. $D_1 = 0$

:D2 تمثل الجنس كمتغير مستقل ويأخذ القيم الآتية:

للدلالة على الأنثى. $D_2 = 1$

. للدلالة على الذكر $D_2=0$

D3: تمثل اللون كمتغير مستقل ويأخذ القيم الآتية:

للدلالة على اللون الأسود. $D_3 = 1$

للدلالة على اللون الأبيض. $D_3 = 0$

Bo: تمثل الحد الثابت.

B₁: تمثل أثر الجنس على احتمال حدوث الفقر.

B2: تمثل أثر اللون على احتمال حدوث الفقر.

جـــدول 5.11: العلاقــة بين الفقر، متغير تابع، والجنس واللون، متغيرات وهمية مستقلة.

<u>a</u>	Janj Di	الخنس D ₂	النون D ₃	ے	ا ند ر D:	الجنس D2	اللون D ₃
1	0	1	0	16	0	0	0
2	0	1	0	17	1	1	1
3	1	1	1	18	0	1	0
4	0	0	0	19	1	1	0
5	0	0	1	20	1	0	0
6	0	1	0	21	1	1	1
7	1	0	0	22	0	0	1
8	1	1	1	23	0	0	0
9	0	0	1	14	1	1	1
10	0	1	0	25	0	1	0
11	0	1	0	26	1	1	1
12	0	0	1	27	. 0	0	0
13	0	0	0	28	1	1	1
14	1	1	1	29	1	0	0
15	0	0	0	30	0	1	0

المطلوب:

أ- تقدير معلمات النموذج باستخدام طريقة OLS.

ب- بيان أثر كل من الجنس واللون على احتمال حدوث الفقر.

وعند تقدير النموذج من البيانات أعلاه وباستخدام طريقة OLS، كان:

$$\hat{D}_1 = 0.10 + 0.23 D_2 + 0.41 D_3$$

ومن النموذج المقدر أعلاه، يتضح ما يأتي:

أ- احستمال حدوث الفقر كنتيجة للجنس يكون بمقدار (0.23) واحتمال حدوث الفقر كنتيجة للون سيكون بمقدار (0.41).

ب- ولخرض تحديد حدوث الفقر لأسباب تتعلق بنوع الجنس واللون، سيكون من خطل تعويض قيم المتغيرات المستقلة حسب أنواعها في النموذج المقدر أعلاه، وذلك من خلال ما يأتى:

1- احتمال حدوث الفقر لرب العائلة لكونه ابيض، هو:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 = 0.10$$

$$D_1 = 1 \text{ (i) } , \quad D_2 = D_3 = 0$$
 لأن

2- احتمال حدوث الفقر للأنثى البيضاء، سيكون:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 = 0.10 + 0.23 = 0.33$$

3- أما احتمال حدوث الفقر للأنشى السوداء، هو:

$$\hat{D}_1 = \hat{B}_0 + \hat{B}_1 + \hat{B}_2$$

$$\hat{D}_1 = 0.10 + 0.23 + 0.41 = 0.47$$

الشهر	کیلة الاتاع (بآلات)		المتغير الوهمي
السجهر	Q	P	D
1	98	0.79	0
2	100	0.80	0
3	103	0.82	0
4	105	0.82	0
. 5	80	0.93	1
6	87	0.95	1
7	94	0.96	1
8	113	0.88	0
9	116	0.88	0
10	118	0.90	0
11	121	0.93	0
12	123	0.94	0
13	126	0.96	0
14	128	0.96	0

المطلوب:

أ- اختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع خلال فترات الإضراب وعدم الإضراب.

ب- اختبار ما إذا كان هناك تحرك في المقطع والميل.

الحل:

أ- عند استخدام طريقة OLS تم الحصول على النموذج الآتي:

$$\hat{Q} = -32.47 + 165.47 P - 37.64 D$$

$$(15.65) \quad (23.59) \qquad R^2 = 0.98$$

فالمقطع خلال فترة عدم الإضراب هو المعامل \hat{B}_0 ، والذي يساوي 32.47. أما خلال فترة الإضراب، فهو:

$$=\hat{B}_0 + \hat{B}_2 = -23.47 + (-37.64) = -70.11$$

A Let \hat{B}_0 by \hat{B}_0 b

وهذا يعني ان المقطع قد تحرك في فترة الإضراب عما هو خلال فترة عدم الإضراب.

ب- لغرض تحديد ما إذا كان هناك تحرك في المقطع والميل، وبعد تقدير النموذج بطريقة OLS، حصلنا على:

$$\hat{Q} = -29.74 + 162.86 P - 309.62 D + 287.14 XD$$

(27.16) (5.67) (4.98) $R^2 = 0.99$

فالمقطع هو 29.74-، والميل هو 162.86 خلال فترة عدم الإضراب. أما في فترة الإضراب، فأن:

المقطع يساوى:

$$\hat{B}_0 + \hat{B}_2 = -29.74 + (-309.62) = -339.36$$

والميل يكون:

$$\hat{B}_1 + \hat{B}_3 = 162.86 + 287.14 = 450$$

وهنا أيضاً ان هناك اختلافاً في الميل والمقطع لفترة عدم الإضراب عن فترة الاضراب.

الأسسئلة والتماريسن

السوال 1.11: إذا توفرت البيانات الآتية عن الدخل القومي ومشتريات الدولة من السندات وكما هو في الجدول الآتي:

	(B _i) المشتريت	الدخل (۲۰)	$\mathbf{D_i}$
1983	2.6	2.4	0
1984	3.0	2.8	0
1985	3.6	3.1	0
1986	3.7	3.4	0
1987	3.8	3.9	0
1988	4.1	4.0	0
1989	4.4	. 4.2	0
1990	7.1	5.1	1
1991	8.0	6.3	1
1992	8.9	6.3	1
1993	9.7	8.1	1
1994	10.2	8.8	1
1995	10.1	9.6	1
1996	7.9	9.7	0
1997	9.7	9.6	0
1998	9.1	10.4	0
1999	10.1	12.0	0

وان نموذج الانحدار قد تم تقديره، يأخذ الصيغة الآتية:

$$B = B_0 + B_1 Y$$

ثم قارن هذا النموذج بالنموذج الآتي:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{Y} + \mathbf{D}$$

إذ ان:

i: تمثل السنوات.

B: تمثل المشتريات العامة لسندات الدولة.

Y: تمثل الدخل القومي.

D: المتغير الوهمي.

المطلوب:

1- أي من النموذجين أعلاه تختار ولماذا؟

2- ما هو أثر الحرب على سلوك الاستثمار، ولماذا؟

السؤال 2.11: البيانات الآتية تمثل مبيعات إحدى الشركات:

المدة الزمنية	S	$\mathbf{D_{i}}$	D_2	\mathbf{D}_3
	70	0	0	0
1997	88	0	0	1
1777	90	0	1	0
	112	11	0	0
	76	0	0	0
1998	92	0	0	1
1990	94	0	1	0
	224	1	0	0
	84	0	0	0
1999	98	0	0	1
1999	96	0	1	0
	236	1	0	0
	84	0	0	0
2000	100	0	0	1
2000	102	0	1	0
	236	1	0	0

المطلوب:

1- تقدير معادلة الانحدار الآتية:

$$S = B_0 + B_1 t + B_2 D_1 + B_3 D_2 + B_4 D_3$$

Y = t إذ ان:

2- هل ان اتجاه الزمن يتغير معنوياً عند إهمال الفصول؟

3- علق اقتصادياً على النموذج.

السؤال 3.11: بافتراض لدينا النموذج الآتي المراد دراسته اقتصادياً:

$$Q = B_0 + B_1 P + B_2 D + U_i$$

إذ ان B₂ > 0 ، وأن:

الحرب. D = 1: تمثل مشتريات اللحوم لسنوات الحرب.

D = 0: تمثل مشتريات اللحوم لسنوات السلم.

Q : تمثل الطلب على اللحوم (مليون كيلو) عند الأسعار الثابتة.

P: تمثل الرقم القياسي للدخل الحقيقي للمستهلك.

لذلك فأن النموذج في ظل سنوات الحرب، عندما يكون D = 1، يكون:

$$Q = (B_0 + B_2) + B_1P + U_i$$

وعند تقدير المعادلة (1)، حصلنا على النتائج الآتية:

$$\hat{Q} = 24 + 0.2 P - 5D$$

المطلوب:

أ- علق اقتصادياً على مشتريات اللحوم أثناء سنوات الحرب والسلم.
 ب- مثل النتائج بيانياً موضحاً ميل النموذج.

 B_0 ما هو تفسير ك للمعامل B_0 .

د- ماذا تعني (B₀ + B₂) اقتصادياً.

السؤال 4.11: ما هو المتغير الوهمي، وما هو دوره في تقدير النماذج القياسية؟

السوال 5.11: ما هي طبيعة المتغيرات الوهمية، وضتح ذلك مع الامثلة والتوضيح البياني.

المصادر، References

أولاً: المصادر العربية:

- بخيت، حسين علي، وغالب عوض الرفاعي، (2003)، أساسيات الاقتصاد الرياضي، دار المناهج، عمان، الأردن.
- بخيت، حسين علي، وغالب عوض الرفاعي، (2006)، تحليل ونمذجة البيانات باستخدام الحاسوب: تطبيق شامل للحزمة SPSS، الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
- الخميسي، رفعت لازم مشعل، 2001، القياس الاقتصادي المتقدم، مطبعة جامعة بغداد، العراق.
- الراوي، خاشع محمود، 1987، المعدق إلى تحليل الانحداد، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، ط1، الموصل، العراق.
- سالفاتور، دومينيك، 1982، نظريات ومسائل في الإحصاء والاقتصاد القياسي، سلسلة ملخصات شوم، دار ماكجروهيل للنشر، ترجمة د. سعدية حافظ منتصر.
- السيفو، وليد، وآخرون، (2004)، الاقتصاد القياسي التحليلي بين النظرية والتطبيق، عمان، الأردن.
- السيفو، وليد إسماعيل، وآخرون، (2006)، مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي: التنبؤ والاختبارات القياسية من الدرجة الثانية، دار الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
- السيفو، وليد إسماعيل، وآخرون، (2006)، أساسيات في الاقتصاد القياسي التحليلي:

- نظرية الاقتصاد القياسي والاختبارات القياسية من الدرجة الأولى، دار الأهلية للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
- شريف، عصام عزيز، 1983، مقدمة في القباس الاقتصادي، الطبعة الثالثة، دار الطليعة للطباعة والنشر، بيروت.
- الشيال، سعد الدين، (1982)، مقدمة في الاقتصاد القياسي، القاهرة، جمهورية مصر العربية.
- عبد الرحمن، عبد المحمود محمد، ، مقدمة في الاقتصاد القياسي، جامعة الملك سعود، كلية العلوم الادارية، قسم الاقتصاد.
- عطية، عبدالقادر محمد عبدالقادر، (1998)، الاقتصاد القياسي بين النظرية والتطبيق، الدار الجامعية، الاسكندرية، جمهورية مصر العربية.
- علي، فاضل احمد وممدوح الدسوقي، وآخرون، (1996)، مقدمة في الاقتصاد القياسي التطبيقي، جامعة قاريونس، ليبيا.
- العيسوي، ابراهيم، (1978)، القياس والتنبؤ في الاقتصاد، دار النهضة العربية، القاهرة، جمهورية مصر العربية.
- فرحان، محمد لطفي، (1998)، مياديء الاقتصاد القياسي، جامعة الفاتح، طرابلس، ليبيا.
- القريشي، محمد صالح تركي، (2004)، مقدمة في الاقتصاد القياسي، مؤسسة الوراق للنشر والتوزيع، عمان، الأردن.
 - كاظم، أموري هادي، 1988 ، طرق القياس الاقتصادي، ط1، بغداد.
- محبوب، عادل عبد الغني، 1982، الاقتصاد القياسي، وزارة التعليم العالي والبحث العلمي، ط1، بغداد.

ثانياً: المصادر الإنكليزية:

- ASHENFELTER, O.; P.B., LEVINE, and D.J. ZIMMERMAN, (2003), Statistics and Econometrics: Methods and Applications, John Wiley & Sons, Inc, U.S.A.
- BALTAGI, B.H., (2002), <u>Econometrics Analysis of Panel Data</u>, 2end Edition, John Wiley & Sons, LTD, West Sussex, England.
- CHOW, G., (1985), **Econometrics**, Mc-Graw-Hill Company, London.
- CHOW, G.C., (1983), <u>Econometrics</u>, Mac Graw-Hill International Book Company, Tokyo.
- DAVIDSON, J., (2000), <u>Econometrics Theory</u>, Blackwell Publishers LTD, Oxford, England.
- DIELMAN, T.E., (2001), <u>Applied Regression Analysis for</u>

 <u>Business and Economics</u>, 3rd Edition, Thomson Learning

 Academic Resource center, U.S.A.
- DOUGHERTY, C., (2002), <u>Introduction to Econometrics</u>, 2end Edition, Oxford University Press, U.K.
- DUTTA, M., (1986), **Econometrics Methods**, South-Western Company, New York.

- FARRAR, D.E., and R.R. GLAUBER, (1967), "Multicollinearity in Regression Analysis: The Problem Revisited"

 Review of Economics and Statistics.
- FAVERO, C.A., (2001), <u>Applied Macroeconometrics</u>, Oxford University Press, New York.
- GREENE, W.H., (2000), **Econometrics Analysis**, 4th Edition, Prentice-Hall International, New Jersey.
- GRIFFITHS, W.E.; R.C. HILL, and G.G. JUDGE, (1993),

 Learning and Practicing Econometrics, John Wiley &
 Sons, INC, Singapore.
- GRIFFITHS, W.E; R.C. HILL, and G.G. DUDGE, (1993),

 Learning and Practicing Econometrics, John Wiley
 and Sons, New York.
- GUJARATI, D.N., (2003), <u>Student Solutions Manual for use</u>

 <u>With Basic Econometrics</u>, 4th Edition, Mc Graw-Hill,

 New York.
- GUJARATT, D.D., (2003), <u>Basic Econometrics</u>, Mc Graw-Hill Companies, International Edition, New York.
- HEBDEN, J., (1981), Statistics for Economist, Philip Allan Publishers Limited, Oxford.
- HENDRY, D.F., (2003), Dynamic Econometrics: Advanced Texts

- in Econometrics, Oxford University Press, New York.
- HSIAO, C., (2003), Analysis of Panel Data, 2end Edition, Cambridge University Press, U.K.
- JOHNSTON, J., (1991), <u>Econometrics Methods</u>, 3rd Edition, McGraw-Hill Book Company, Singapore.
- KAMENTA, J., (1986), <u>Elements of Econometrics</u>, Macmillan, New York.
- KOUTSOYIANNIS, A., (1979), "Theory of Econometrics" 2nd addition Macmillan, London.
- MADDALA, G.S., (1977), "Econometrics" McGraw-Hill Book company, New York.
- PINDYCH, R.S., and D.L., RUBINFED, (1998), **Econometrics**Models and Economic Forecasts, 4th Edition, McGraw –

 Hill, New York.
- RAMANATHAN, R., (1993), <u>Statistical Methods in</u>
 <u>Econometrics</u>, Academic Press, San Diego.
- SALVATORY, D., (1985), <u>Statistics and Econometrics</u>, Schaum's Series in Econometrics.
- SEDDIGHI, H.R.; K.A. LAWLER, and A.V. KATOS, (2000), **Econometrics: A Practical Approach**, Routledge, London, England.

- SENGUPTA, J., (1993), <u>Econometrics of Information and</u>
 <u>Efficiency</u>, Kluwer Academic Publishers, Netherlands.
- STOCK, J.H., and M.W. WATSON, (2003), <u>Introduction to</u>
 <u>Econometrics</u>, Addison Wesley, U.S.A.
- STUDENMUND, A.H., (2001), <u>Using Econometrics</u>, 4th Edition, Addison Wesley Longman, Inc, U.S.A.
- THOMAS, R.L., (1993), <u>Introductory Econometrics: Theory</u> and <u>Applications</u>, 2nd Edition, Longman, London.
- THOMAS, R.L., (1997), Modern Econometrics: An Introduction, Longman, London.
- VEGA-REDONDO, F., (2003), Economics and the Theory of Games, Cambridge University Press, U.K.
- VERBEEK, M., and KU. LEUVEN, (2000) <u>A Guide to Modern</u>
 <u>Econometrics</u>, John Wiley & Sons, LTD, England.
- WALTERS, A.A., (1968), An Introduction to Econometrics, Macmillan, London.
- WONNACOTT, R.J., and T.H. WANNACOTT, (1979),

 <u>Econometrics</u>, John Wiley and Sons Inc., New
 York.
- WOOLDRIDGE, J.M., (2002), Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data, The MIT Press, Cambridge,

- Massachusetts, London, England.
- PATTERSON, K., (2000), An Introduction to Applied

 Econometrics a time series approach, Macmillan,

 London, U.K.
- KOOP, G., (2000), Analysis of Economic Data, John Wiley & Sons, LTD., West Sussex, England.
- MIRER, T.W., (1995), <u>Economic Statistics and Econometrics</u>, 3rd Edition, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, U.S.A.
- WANG, P., (2003), <u>Financial Econometrics: Methods and Models</u>, Routledge, New York.

الملاحق

Appendix Tables

Table 1: Cumulative normal distribution. Table entry is $\Phi(z) = \text{Prob } [Z \le z]$.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.9700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

Table 2: Ordinates of the Standard Normal Density. Table Entry is $\Phi(z)$.

Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009

Table 3: Percentiles of the Student's Distribution.

Table Entry is x Such That Prob $\left[t_{_{n}} \leq x\right] = P$.

Pn	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	1.000	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66
2	0.817	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.766	1.638	2.354	3.182	4.541	5.841
4	0.741	1.533	2.132	2.777	3.747	4.604
5	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.708
7	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.500
8	0.706	1.397	1.860	2.306	2.897	3.355
9	0.703	1.383	1.833	2.262	2.822	3.250
10	0.700	1.372	1.813	2.228	2.764	3.169
11	0.698	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.696	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	1.350	1.771	2.161	2.650	3.012
14	0.693	1.345	1.762	2.145	2.624	2.977
15	0.691	1.341	1.753	2.132	2.602	2.947
16	0.691	1.337	1.746	2.120	2.584	2.921
17	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	1.330	1.734	2:101	2.552	2.879
19	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	1.326	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.687	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.686	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.686	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.685	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	1.314	1.704	2.052	2.473	2.771
28	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	1.311	1.697	2.042	2.457	2.750
35	0.682	1.307	1.690	2.030	2.438	2.724
40	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.705
45	0.680	1.301	1.680	2.014	2.412	2.690
50	0.680	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678
60	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
70	0.679	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648
80	0.679	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639
90	0.678	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632
100	0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626
00	0.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

Table 4: Percentiles of the Chi-Squared Distribution. Table Entry Is a Such That Prob $[X_n^2 \le c] = P$.

Pn	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.500	.750	.900	.950	.975	.990	.995
_ 1	0.00004	0.0002	0.001	0.004	0.02	0.10	0.46	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.89
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.58	1.39	2.27	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.12	0.22	0.35	0.59	1.21	2.37	4.11	6.25	7.82	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.49	0.71	1.06	1.92	3.36	5.39	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.56	0.83	1.15	1.61	2.68	4.35	6.63	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.21	3.46	5.35	7.84	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
_ 7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	6.35	9.04	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.35	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	7.34	10.22	13.36	15.51	17.54	20.09	21.96
9	1.74	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	8.34	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	9.34	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.59	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
_13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.17	13.34	17.12	21.07	23.69	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
_17	5.70	6.41	7.57	8.67	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	13.68	17.34	21.61	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
_20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	16.35	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
_22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.93	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28:24	33.20	36.42	39.37	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.32	46.93

Table 4; Continued

26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.44	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
31	13.70	15.04	17.11	19.01	21.31	25.46	30.50	36.00	41.33	44.70	47.73	51.38	53.94
32	14.37	15.74	17.87	19.80	22.15	26.37	31.50	37.08	42.49	45.91	48.98	52.67	55.26
33	15.05	16.45	18.62	20.59	22.99	27.29	32.50	38:17	43.65	47.12	50.22	53.96	56.59
34	15.73	17.16	19.38	21.39	23.83	28.21	33.50	39.25	44.81	48.32	51.46	55.25	57.90
35	16.42	17.88	20.14	22.19	24.68	29.13	34.50	40.33	45.97	49.52	52.70	56.53	59.21
36	17.11	18.60	20.91	22.99	25.52	30.05	35.50	41.41	47.12	50.71	53.94	57.81	60.52
37	17.81	19.33	21.68	23.80	26.37	30.97	36.50	42.49	48.27	51.91	55.17	59.08	61.83
38	18.51	20.06	22.45	24.61	27.22	31.89	37.50	43.57	49.42	53.10	56.39	60.35	63.13
39	19.22	20.79	23.22	25.42	28.08	32.81	38.50	44.65	50.57	54.29	57.62	61.62	64.42
40	19.92	21.53	24.00	26.23	28.93	33.73	39.50	45.72	51.71	55.47	58.84	62.88	65.71
41	20.64	22.27	24.78	27.05	29.79	34.66	40.50	46.80	52.86	56.66	60.06	64.14	67.00
42	21.35	23.01	25.57	27.87	30.65	35.58	41.50	47.87	54.00	57.84	61.28	65.40	68.29
43	22.07	23.76	26.35	28.69	31.51	36.51	42.50	48.95	55.14	59.02	62.49	66.65	69.57
44	22.79	24.51	27.14	29.51	32.37	37.44	43.50	50.02	56.27	60.19	63.70	67.91	70.84
45	23.52	25.26	27.93	30.34	33.23	38.37	44.50	51.09	57.41	61.37	64.91	69.15	72.12
46	24.25	26.02	28.72	31.16	34.10	39.29	45.50	52.16	58.55	62.54	66.12	70.40	73.39
47	24.98	26.77	29.52	31.99	34.96	40.22	46.50	53.23	59.68	63.72	67.32	71.64	74.66
48	25.71	27.53	30.32	32.82	35.83	41.15	47.50	54.30	60.81	64.89	68.53	72.88	75.92
49	26.45	28.30	31.12	33.65	36.70	42.08	48.50	55.37	61.94	66.05	69.73	74.12	77.19
50	27.19	29.06	31.92	34.49	37.57	43.02	49.50	56.44	63.07	67.22	70.92	75.35	78.45

Table 5: 95th Percentile of the F Distribution. Table Entry Is f Such That Prob. $[F_{n1,n2} \le f] = .95$

n ₂	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	6.54	9.12	5.89	8.94	5.63	8.85	5.49
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.10	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.72
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.77	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.97	2.81	2.70	2.62	2.55	2.50
18	4.41	3.56	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.52	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.69	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.38	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.41	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.48	2.39	2.32	2.27
27	4.22	3.36	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.72	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.94	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.34	2.27	2.21
35	4.12	3.27	2.88	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16

Table 5: Continued

40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.13
45	4.06	3.21	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10
50	4.05	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.26	2.17	2.10	2.04
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.22	2.13	2.06	2.00
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.98
- 8	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

n1 = Degrees of Freedom for the Numerator

10	12	15	20	30	40	50	60	∞
242	244	246	248	250	251	251	252	254
19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
8.79	8.74	5.32	8.66	8.62	8.59	8.58	8.57	5.63
5.97	5.91	5.86	5.80	5.75	5.72	5.70	5.69	5.63
4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.46	4.44	4.43	4.37
4.06	4.00	3.94	3.88	3.81	3.78	3.75	3.74	3.67
3.64	3.58	3.51	3.45	3.38	3.34	3.32	3.31	3.23
3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.04	3.02	3.01	2.93
3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.83	2.80	2.79	2.71
2.98	2.91	2.85	2.78	2.70	2.66	2.64	2.62	2.54
2.85	2.79	2.72	2.65	2.57	2.53	2.51	2.49	2.40
2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.43	2.40	2.39	2.30
2.67	2.60	2.53	2.46	2.38	2.34	2.31	2.30	2.21
2.60	2.54	2.46	2.39	2.31	2.27	2.24	2.22	2.13
2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.21	2.18	2.16	2.07
2.49	2.43	2.35	2.28	2.19	2.15	2.12	2.11	2.01
2.45	2.38	2.31	2.23	2.15	2.10	2.08	2.06	1.96
2.41	2.34	2.27	2.19	2.11	2.06	2.04	2.02	1.92
2.38	2.31	2.24	2.16	2.07	2.03	2.00	1.98	1.88
2.35	2.28	2.20	2.13	2.04	1.99	1.97	1.95	1.84
2.32	2.25	2.18	2.10	2.01	1.97	1.94	1.92	1.81
2.30	2.23	2.15	2.07	1.99	1.94	1.91	1.89	1.78
2.28	2.20	2.13	2.05	1.96	1.91	1.89	1.87	1.76
2.26	2.18	2.11	2.03	1.94	1.89	1.86	1.84	1.73
2.24	2.17	2.09	2.01	1.92	1.87	1.84	1.82	1.71
2.22	2.15	2.07	1.99	1.90	1.85	1.82	1.80	1.70
2.21	2.13	2.06	1.97	1.89	1.84	1.81	1.79	1.68
2.19	2.12	2.04	1.96	1.87	1.82	1.79	1.77	1.66
2.18	2.11	2.03	1.95	1.86	1.81	1.78	1.75	1.65

n1 = Degrees of Freedom for the Numerator: Continued

2.17	2.09	2.02	1.93	1.84	1.79	1.76	1.74	1.62
2.12	2.04	1.96	1.88	1.79	1.74	1.70	1.68	1.57
2.08	2.00	1.92	1.84	1.75	1.69	1.66	1.64	1.51
2.05	1.98	1.90	1.81	1.71	1.66	1.63	1.60	1.48
2.03	1.95	1.87	1.79	1.69	1.63	1.60	1.58	1.45
1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.60	1.56	1.54	1.39
1.97	1.89	1.81	1.72	1.62	1.57	1.53	1.51	1.36
1.95	1.88	1.79	1.70	1.60	1.55	1.51	1.48	1.34_
1.94	1.86	1.78	1.69	1.59	1.53	1.49	1.47	1.32
1.93	1.85	1.77	1.68	1.57	1.52	1.48	1.45	1.30
1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.39	1.34	1.31	1.00

Table 6: 99th Percentiles of the Distribution.

Table Entry Is f Such That Prob. [Fn1,n2 < f]=.99
n1 = Degrees of Freedom for the Numerator

n ₂	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052	5000	5403	5625	5724	5859	5928	5982	6023
2	98.5	99.0	99.2	99.3	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3	34.1	30.8	21.3	28.7	19.0	27.9	27.7	27.5	27.3
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.6	10.5	10.3	10.2
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10	10.0	7.56	6.55	6.00	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.01	3.90
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.68
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60
19	8.19	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.57	3.46
21	8.02	5.78	4.88	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.86	3.63	3.46	3.32	3.22
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.79	3.56	3.39	3.26	3.15
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12

Table 6: Continued

29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.31	3.17	3.07
35	7.41	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
45	7.23	5.11	4.25	3.77	3.46	3.23	3.07	2.94	2.83
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.79
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64
90	6.93	4.85	4.01	3.54	3.23	3.01	2.85	2.72	2.61
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.70	2.59
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

 $n_1 =$ Degrees of Freedom for the Numerator

10	12	15	20	30	40	50	60	∞
6056	6106	6157	6209	6261	6287	6302	6313	6366
99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.4	26.3	26.1
14.6	14.4	14.2	14.0	13.8	13.8	13.7	13.6	13.5
10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.29	9.24	9.20	9.02
7.88	7.72	7.56	7.40	7.23	7.14	7.09	7.06	6.88
6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.91	5.86	5.82	5.65
5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.12	5.07	5.03	4.86
5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.57	4.52	4.48	4.31
4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.17	4.12	4.08	3.91
4.54	4.40	4.25	4.10	3.94	3.86	3.81	3.78	3.60
4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.62	3.57	3.54	3.36
4.10	3.96	3.82	3.67	3.51	3.43	3.38	3.34	3.17
3.94	3.80	3.66	3.51	3.35	3.27	3.22	3.18	3.00
3.81	3.67	3.52	3.37	3.22	3.13	3.08	3.05	2.87
3.69	3.55	3.41	3.26	3.10	3.02	2.97	2.93	2.75
3.59	3.46	3.31	3.16	3.00	2.92	2.87	2.84	2.65
3.51	3.37	3.23	3.08	2.92	2.84	2.79	2.75	2.57
3.43	3.30	3.15	3.00	2.85	2.76	2.71	2.68	2.49
3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.70	2.64	2.61	2.42
3.31	3.17	3.03	2.88	2.72	2.64	2.58	2.55	2.36
3.26	3.12	2.98	2.83	2.67	2.58	2.53	2.50	2.31
3.21	3.08	2.93	2.78	2.62	2.54	2.48	2.45	2.26
3.17	3.03	2.89	2.74	2.58	2.49	2.44	2.40	2.21
3.13	2.99	2.85	2.70	2.54	2.45	2.40	2.36	2.17

n1 = Degrees of Freedom for the Numerator: Continued

3.10	2.96	2.82	2.66	2.50	2.42	2.36	2.33	2.13
3.06	2.93	2.78	2.63	2.47	2.38	2.33	2.29	2.10
3.03	2.90	2.75	2.60	2.44	2.35	2.30	2.26	2.06
3.01	2.87	2.73	2.58	2.41	2.33	2.27	2.24	2.03
2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.30	2.25	2.21	2.01
2.88	2.74	2.60	2.45	2.28	2.19	2.14	2.10	1.91
2.80	2.67	2.52	2.37	2.20	2.12	2.06	2.02	1.81
2.74	2.61	2.47	2.31	2.15	2.06	2.00	1.96	1.75
2.70	2.56	2.42	2.27	2.10	2.01	1.95	1.91	1.68
2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.94	1.88	1.84	1.60
2.59	2.45	2.31	2.15	1.98	1.89	1.83	1.79	1.53
2.55	2.42	2.27	2.12	1.94	1.85	1.79	1.75	1.49
2.53	2.39	2.25	2.09	1.92	1.82	1.76	1.72	1.48
2.50	2.37	2.22	2.07	1.89	1.80	1.74	1.69	1.43
2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.57	1.51	1.46	1.00

Table 7a Durbin- Watson Statistic: 1 Percent Significance Points of dL and dU

n	K=	=1	k=	=2	k=	=3	k=	=4	k=	=5
	dL	dU								
6	0.390	1.142	•	-	-	-	-	-	-	-
7	0.435	1.036	0.294	1.676	-	-	_	-	•	-
8	0.497	1.003	0.345	1.489	0.229	2.102	•	_	-	-
9	0.554	0.998	0.408	1.389	0.279	1.875	0.183	2.433	-	-
10	0.604	1.001	0.466	1.333	0.340	1.733	0.230	2.193	0.150	2.690
11	0.653	1.010	0.519	1.297	0.396	1.640	0.286	2.030	0.193	2.453
12	0.697	1.023	0.569	1.274	0.449	1.575	0.339	1.913	0.244	2.280
13	0.738	1.038	0.616	1.261	0.499	1.526	0.391	1.826	0.294	2.150
14	0.776	1.054	0.660	1.254	0.547	1.490	0.441	1.757	0.343	2.049
15	0.811	1.070	0.700	1.252	0.591	1.464	0.488	1.704	0.391	1.967
16	0.844	1.086	0.737	1.252	0.633	1.446	0.532	1.663	0.437	1.900
17	0.874	1.102	0.772	1.255	0.672	1.432	0.574	1.630	0.480	1.847
18	0.902	1.118	0.805	1.259	0.708	1.422	0.613	1.604	0.522	1.803
19	0.928	1.132	0.835	1.265	0.742	1.415	0.650	1.584	0.561	1.767
20	0.952	1.147	0.863	1.271	0.773	1.411	0.685	1.567	0.598	1.737
21	0.975	1.161	0.890	1.277	0.803	1.408	0.718	1.554	0.633	1.712
22	0.997	1.174	0.914	1.284	0.831	1.407	0.748	1.543	0.667	1.691
23	1.018	1.187	0.938	1.291	0.858	1.407	0.777	1.534	0.698	1.673
24	1.037	1.199	0.960	1.298	0.882	1.407	0.805	1.528	0.728	1.658
25	1.055	1.211	0.981	1.305	0.906	1.409	0.831	1.523	0.756	1.645
26	1.072	1.222	1.001	1.312	0.928	1.411	0.855	1.518	0.783	1.635
27	1.089	1.233	1.019	1.319	0.949	1.413	0.878	1.515	0.808	1.626
28	1.104	1.244	1.037	1.325	0.969	1.415	0.900	1.513	0.832	1.618
29	1.119	1.254	1.054	1.332	0.988	1.418	0.921	1.512	0.855	1.611
30	1.133	1.263	1.070	1.339	1.006	1.421	0.941	1.511	0.877	1.606
31	1.147	1.273	1.085	1.345	1.023	1,425	0.960	1.510	0.897	1.601
32	1.160	1.282	1.100	1.352	1.040	1.428	0.979	1.510	0.917	1.597
33	1.172	1.291	1.114	1.358	1.055	1.432	0.996	1.510	0.936	1.594
34	1.184	1.299	1.128	1.364	1.070	1.435	1.012	1.511	0.954	1.591
35	1.195	1.307	1.140	1.370	1.085	1.439	1.028	1.512	0.971	1.589
36	1.206	1.315	1.153	1.376	1.098	1.442	1.043	1.513	0.988	1.588
37	1.217	1.323	1.165	1.382	1.112	1.446	1.058	1.514	1.004	1.586
38	1.227	1.330	1.176	1.388	1.124	1.449	1.072	1.515	1.019	1.585
39	1.237	1.337	1.187	1.393	1.137	1.453	1.085	1.517	1.034	1.584

Table 7a: Continued

40	1.246	1.344	1.198	1.398	1.148	1.457	1.098	1.518	1.048	1.584
45	1.288	1.376	1.245	1.423	1.201	1.474	1.156	1.528	1.111	1.584
50	1.324	1.403	1.285	1.446	1.245	1.491	1.205	1.538	1.164	1.587
55	1.356	1.427	1.320	1.466	1.284	1.506	1.247	1.548	1.209	1.592
60	1.383	1.449	1.350	1.484	1.317	1.520	1.283	1.558	1.249	1.598
65	1.407	1.468	1.377	1.500	1.346	1.534	1.315	1.568	1.283	1.604
70	1.429	1.485	1.400	1.515	1.372	1.546	1.343	1.578	1.313	1.611
75	1.448	1.501	1.422	1.529	1.395	1.557	1.368	1.587	1.340	1.617
80	1.466	1.515	1.441	1.541	1.416	1.568	1.390	1.595	1.364	1.624
85	1.482	1.528	1.458	1.553	1.435	1.578	1.411	1.603	1.386	1.630
90	1.496	1.540	1.474	1.563	1.452	1.587	1.429	1.611	1.406	1.636
95	1.510	1.552	1.489	1.575	1.468	1.596	1.446	1.618	1.425	1.642
100	1.522	1.562	1.503	1.583	1.482	1.604	1.462	1.625	1.441	1.647
150	1.611	1.637	1.598	1.651	1.584	1.665	1.571	1.679	1.557	1.693
200	1.664	1.684	1.653	1.693	1.643	1.704	1.633	1.715	1.623	1.725

Table 7a – Continued

k ²	=6	k	=7	k=	-8	k=	=9	k=	10
dL	ОБ	dL	đU	dL	dU	dL	dU	dl	dU
-	-	_	-	-	-	-	-	-	•
-	-		-		-	-	-	-	-
-	-		-	-	-	_	-	_	-
-	-	-	-	•		-	-	-	-
-	-		-	-	-	-	_	-	-
0.124	2.892		-	•		_	-	-	-
0.164	2.665	0.105	3.053	-	-	-	-	-	
0.211	2.490	0.140	2.838	0.090	3.182	-	-	_	-
0.257	2.354	0.183	2.667	0.122	2.981	0.078	3.278	•	-
0.303	2.244	0.226	2.530	0.161	2.817	0.107	3.101	0.068	3.374
0.349	2.153	0.269	2.416	0.200	2.681	0.142	2.944	0.094	3.201
0.393	2.078	0.313	2.319	0.241	2.566	0.179	2.811	0.127	3.053
0.435	2.015	0.355	2.238	0.282	2.467	0.126	2.697	0.160	2.925
0.476	1.963	0.396	2.169	0.322	2.381	0.255	2.597	0.196	2.813
0.515	1.918	0.436	2.110	0.362	2.308	0.294	2.510	0.232	2.714
0.552	1.881	0.474	2.059	0.400	2.244	0.331	2.468	0.268	2.625
0.587	1.849	0.510	2.015	0.437	2.188	0.368	2.367	0.304	2.548
0.620	1.821	0.545	1.977	0.437	2.140	0.404	2.308	0.340	2.479
0.652	1.797	0.578	1.944	0.507	2.097	2.439	2.255	0.375	2.417
0.682	1.766	0.610	1.915	0.540	2.059	0.473	2.209	0.409	2.362
0.711	1.759	0.640	1.889	0.572	2.026	0.505	2.168	0.441	2.313
0.738	1.743	0.669	1.867	0.602	1.997	0.536	2.131	0.473	2.269
0.764	1.729	0.696	1.847	0.630	1.970	0.566	2.098	0.504	2.229
0.788	1.718	0.723	1.830	0.658	1.947	0.595	2.068	0.533	2.193
0.812	1.707	0.748	1.814	0.684	1.925	0.622	2.041	0.562	2.160
0.834	1.698	0.772	1.800	0.710	1.906	0.649	2.017	0.589	2.131
0.856	1.690	0.794	1.788	0.734	1.889	0.674	1.995	0.615	2.104
0.876	1.683	0.816	1.776	0.757	1.874	0.698	1.975	0.641	2.080
0.896	1.677	0.837	1.766	0.779	1.860	0.722	1.957	0.665	2.057
0.914	1.671	0.857	1.757	0.800	1.847	0.744	1.940	0.689	2.037
0.932	1.666	0.877	1.749	0.821	1.836	0.766	1.925	0.711	2.018
0.950	1.662	0.895	1.742	0.841	1.825	0.787	1.911	0.733	2.001
0.966	1.658	0.913	1.735	0.860	1.816	0.807	1.899	0.754	1.985
0.982	1.655	0.930	1.729	0.878	1.807	0.826	1.887	0.774	1.970
0.997	1.652	0.946	1.724	0.895	1.799	0.844	1.876	0.789	1.956
1.065	1.643	1.019	1.704	0.974	1.768	0.927	1.834	0.881	1.902
1.123	1.639	1.081	1.692	1.039	1.748	0.997	1.805	0.955	1.864

Table 7a: Continued

1.172	1.638	1.134	1.685	1.095	1.734	1.057	1.785	1.018	1.837
1.214	1.639	1.179	1.682	1.144	1.726	1.108	1.771	1.072	1.817
1.251	1.642	1.218	1.680	1.186	1.720	1.153	1.761	1.120	1.802
1.283	1.645	1.253	1.680	1.223	1.716	1.192	1.754	1.162	1.792
1.283	1.645	1.253	1.680	1.223	1.716	1.192	1.754	1.162	1.792
1.313	1.646	1.284	1.682	1.256	1.716	1.227	1.746	1.199	1.785
1.338	1.653	1.312	1.683	1.285	1.714	1.259	1.745	1.232	1.777
1.362	1.657	1.337	1.685	1.312	1.714	1.287	1.743	1.262	1.773
1.383	1.661	1.360	1.687	1.336	1.714	1.312	1.741	1.288	1.769
1.403	1.666	1.381	1.690	1.358	1.715	1.336	1.741	1.313	1.767
1.421	1.670	1.400	1.693	1.378	1.717	1.357	1.741	1.335	1.765
1.543	1.708	1.530	1.722	1.515	1.737	1.501	1.752	1.468	1.767
1.613	1.735	1.603	1.746	1.592	1.575	1.582	1.768	1.571	1.779

Table 7a – Continued

n	k=	11	k=	12	k=	13	k=	14	k=	15
	dL	dU								
16	0.060	3.446	-		-	••	-	-	-	-
17	0.084	3.286	0.053	3.506	-	-	-	•	-	-
18	0.113	3.146	0.075	3.358	0.047	3.557	-	-	-	-
19	0.145	3.023	0.102	3.227	0.067	3.420	0.043	3.601	-	-
20	0.178	2.914	0.131	3.109	0.092	3.297	0.061	3.474	0.038	3.639
21	0.212	2.817	0.162	3.004	0.119	3.185	0.084	3.358	0.055	3.521
22	0.246	2.729	0.194	2.909	0.148	3.084	0.109	3.252	0.077	3.412
23	0.281	2.651	0.227	2.822	0.178	2.991	0.136	3.155	0.100	3.311
24	0.315	2.580	0.260	2.744	0.209	2.906	0.165	3.065	0.125	3.218
25	0.348	2.517	0.292	2.674	0.240	2.829	0.194	2.982	0.152	3.131
26	0.381	2.460	0.324	2.610	0.272	2.758	0.224	2.906	0.180	3.050
27	0.413	2.409	0.356	2.552	0.303	2.964	0.253	2.836	0.208	2.976
28	0.444	2.363	0.387	2.499	0.333	2.635	0.283	2.772	0.237	2.907
29	0.474	2.321	0.417	2.451	0.363	2.582	0.313	2.713	0.266	2.843
30	0.503	2.283	0.447	2.407	0.393	2.533	0.342	2.659	0.294	2.785
31	0.531	2.248	0.475	2.367	0.422	2.487	0.371	2.609	0.322	2.730
32	0.558	2.216	0.503	2.330	0.450	2.446	0.399	2.563	0.350	2.680
33	0.585	2.187	0.530	2.296	0.477	2.408	0.426	2.520	0.377	2.633
34	0.610	2.160	0.556	2.266	0.503	2.373	0.452	2.481	0.404	2.590
35	0.634	2.136	0.581	2.237	0.529	2.340	0.478	2.444	0.430	2.550
36	0.658	2.113	0.605	2.210	0.554	2.310	0.504	2.410	0.455	2.512
37	0.680	2.092	0.628	2.186	0.578	2.282	0.528	2.379	0.480	2.477
38	0.702	2.073	0.651	2.164	0.601	2.256	0.552	2.350	0.504	2.445
39	0.723	2.055	0.673	2.143	0.623	2.232	0.575	2.323	0.528	2.414
40	0.744	2.039	0.694	2.123	0.645	2.210	0.597	2.297	0.551	2.386
45	0.835	1.972	0.790	2.044	0.744	2.118	0.700	2.193	0.655	2.269
50	0.913	1.925	0.871	1.987	0.829	2.051	0.787	2.116	0.746	2.182
55	0.979	1.891	0.940	1.945	0.902	2.002	0.863	2.059	0.825	2.117
60	1.037	1.865	1.001	1.914	0.965	1.964	0.929	2.015	0.893	2.067
65	1.087	1.845	1.053	1.889	1.020	1.934	0.986	1.980	0.953	2.027

Table 7a – Continued

70	1.131	1.831	1.099	1.870	1.068	1.911	1.037	1.953	1.005	1.995
75	1.170	1.819	1.141	1.856	1.111	1.893	1.082	1.931	1.052	1.970
80	1.205	1.810	1.777	1.844	1.150	1.878	1.122	1.913	1.094	1.949
85	1.236	1.803	1.210	1.834	1.184	1.866	1.158	1.898	1.132	1.931
90	1.264	1.798	1.240	1.827	1.215	1.856	1.191	1.886	1.166	1.917
95	1.290	1.793	1.267	1.821	1.244	1.848	1.221	1.876	1.197	1.905
100	1.314	1.790	1.292	1.816	1.270	1.841	1.248	1.868	1.225	1.895
150	1.473	1.783	1.458	1.799	1.444	1.814	1.429	1.830	1.414	1.847
200	1.561	1.791	1.550	1.801	1.539	1.813	1.528	1.824	1.518	1.836

Table 7a - Continued

k=	:16	k=	17	k=1	8	k=	19	k=20		
dL	dU									
-	-	-	-	-	-	- 1	-	-	-	
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
-	-	-	-	-	-	-	-		-	
-		-	-	-		-	_		-	
-	-	-	_	-	_	-	-		-	
0.035	3.671	-	-	-	_	-]	-		-	
0.050	3.562	0.032	3.700	-	_	-	-		-	
0.070	3.459	0.046	3.597	0.029	3.725	-	-	-		
0.092	3.363	0.065	3.501	0.043	3.629	0.027	3.747			
0.116	3.274	0.085	3.410	0.060	3.538	0.039	3.657	0.025	3.766	
0.141	3.191	0.107	3.325	0.079	3.452	0.055	3.572	0.036	3.682	
0.167	3.113	0.131	3.245	0.100	3.371	0.073	3.490	0.051	3.602	
0.194	3.040	0.156	3.169	0.122	3.294	0.093	3.412	0.068	3.524	
0.222	2.972	0.182	3.098	0.146	3.220	0.114	3.338	0.087	3.450	
0.249	2.909	0.208	3.032	0.171	3.152	0.137	3.267	0.107	3.379	
0.277	2.851	0.234	2.970	0.196	3.087	0.160	3.201	0.128	3.311	
0.304	2.797	0.261	2.912	0.221	3.026	0.184	3.137	0.151	3.246	
0.331	2.746	0.287	2.858	0.246	2.969	0.209	3.078	0.174	3.184	
0.357	2.699	0.313	2.808	0.272	2.915	0.233	3.022	0.197	3.126	
0.383	2.655	0.339	2.761	0.297	2.865	0.257	2.969	0.221	3.071	
0.409	2.614	0.364	2.717	0.322	2.818	0.282	2.919	0.244	3.019	
0.434	2.576	0.389	2.675	0.347	2.774	0.306	2.872	0.268	2.969	
0.458	2.540	0.414	2.637	0.371	2.733	0.330	2.828	0.291	2.923	
0.482	2.507	0.438	2.600	0.395	2.694	0.354	2.787	0.315	2.879	
0.505	2.476	0.461	2.566	0.418	2.657	0.377	2.748	0.338	2.838	
0.612	2.346	0.570	2.424	0.528	2.503	0.488	2.582	0.448	2.661	
0.705	2.250	0.665	2.318	0.625	2.387	0.586	2.456	0.548	2.526	
0.786	2.176	0.748	2.237	0.711	2.298	0.674	2.359	0.637	2.421	
0.857	2.120	0.822	2.173	0.786	2.227	0.751	2.283	0.716	2.338	
0.919	2.075	0.886	2.123	0.852	2.172	0.819	2.221	0.786	2.272	

Table 7a: Continued

0.974	2.038	0.943	2.082	0.911	2.127	0.880	2.172	0.849	2.217
1.023	2.009	0.993	2.049	0.964	2.090	0.934	2.131	0.905	2.172
1.066	1.984	1.039	2.022	1.011	2.057	0.983	2.097	0.955	2.135
1.106	1.965	1.080	1.999	1.053	2.033	1.027	2.068	1.000	2.104
1.141	1.948	1.116	1.979	1.091	2.012	1.066	2.044	1.041	2.077
1.174	1.934	1.150	1.963	1.126	1.993	1.102	2.023	1.079	2.054
1.203	1.922	1.181	1.949	1.158	1.977	1.136	2.006	1.113	2.034
1.400	1.863	1.385	1.880	1.370	1.897	1.355	1.913	1.340	1.931
1.507	1.847	1.495	1.860	1.484	1.871	1.474	1.883	1.462	1.896

Table 7b – Durbin-Watson Statistic: 5 Percent Significance Points of dL and dU

,	k=	=1	k=	-2	k=	=3	k=	-4	k=	=5
n	dL	dU								
6	0.610	1.400	-	-	-	-	-	-		-
7	0.700	1.356	0.467	1.896	-					-
8	0.763	1.332	0.559	1.777	0.368	2.287	-			
9	0.824	1.320	0.629	1.699	0.455	2.128	0.296	2.588	-	-
10	0.879	1.320	0.697	1.641	0.525	2.016	0.376	2.414	0.243	2.822
11	0.927	1.324	0.758	1.604	0.595	1.928	0.444	2.283	0.316	2.645
12	0.971	1.331	0.812	1.579	0.658	1.864	0.512	2.177	0.379	2.506
13	1.010	1.340	0.861	1.562	0.715	1.816	0.574	2.094	0.445	2.390
14	1.045	1.350	0.905	1.551	0.767	1.779	0.632	2.030	0.505	2.296
15	1.077	1.361	0.946	1.543	0.814	1.750	0.685	1.977	0.562	2.220
16	1.106	1.371	0.982	1.539	0.857	1.728	0.734	1.935	0.615	2.157
17	1.133	1.381	1.015	1.536	0.897	1.710	0.779	1.900	0.664	2.104
18	1.158	1.391	1.046	1.535	0.933	1.696	0.820	1.872	0.710	2.060
19	1.180	1.401	1.074	1.536	0.967	1.685	0.859	1.848	0.752	2.023
20	1.201	1.411	1.100	1.537	0.998	1.676	0.894	1.828	0.792	1.991
21	1.221	1.420	1.125	1.538	1.026	1.669	0.927	1.812	0.829	1.964
22	1.239	1.429	1.147	1.541	1.053	1.664	0.958	1.797	0.863	1.940
23	1.257	1.437	1.168	1.543	1.078	1.660	0.986	1.785	0.895	1.920
24	1.273	1.446	1.188	1.546	1.101	1.656	1.013	1.775	0.925	1.902
25	1.288	1.454	1.206	1.550	1.123	1.654	1.038	1.767	0.953	1.886
26	1.302	1.461	1.224	1.553	1.143	1.652	1.062	1.759	0.979	1.873
27	1.316	1.469	1.240	1.556	1.162	1.651	1.084	1.753	1.004	1.861
28	1.328	1.476	1.255	1.560	1.181	1.650	1.104	1.747	1.028	1.850
29	1.341	1.483	1.270	1.563	1.198	1.650	1.124	1.743	1.050	1.841
30	1.352	1.489	1.284	1.567	1.214	1.650	1.143	1.739	1.071	1.833
31	1.363	1.496	1.297	1.570	1.229	1.650	1.160	1.735	1.090	1.825
32	1.373	1.502	1.309	1.574	1.244	1.650	1.177	1.732	1.109	1.819
33	1.383	1.508	1.321	1.577	1.258	1.651	1.193	1.730	1.127	1.813
34	1.393	1.514	1.333	1.580	1.271	1.652	1.208	1.728	1.144	1.808
35	1.402	1.519	1.343	1.584	1.283	1.653	1.222	1.726	1.160	1.803
36	1.411	1.525	1.354	1.587	1.295	1.654	1.236	1.724	1.175	1.799
37	1.419	1.530	1.364	1.590	1.307	1.655	1.249	1.723	1.190	1.795
38	1.427	1.535	1.373	1.594	1.318	1.656	1.261	1.772	1.204	1.792
39	1.435	1.540	1.382	1.597	1.328	1.658	1.273	1.722	1.218	1.789

Table 7b: Continued

40	1.442	1.544	1.391	1.600	1.338	1.659	1.285	1.721	1.230	1.786
45	1.475	1.566	1.430	1.615	1.383	1.666	1.336	1.720	1.287	1.776
50	1.503	1.585	1.462	1.628	1.421	1.674	1.378	1.721	1.355	1.771
55	1.528	1.601	1.490	1.641	1.452	1.681	1.414	1.724	1.374	1.768
60	1.549	1.616	1.514	1.652	1.480	1.689	1.444	1.727	1.408	1.767
65	1.567	1.629	1.536	1.662	1.503	1.696	1.471	1.731	1.438	1.767
70	1.583	1.641	1.554	1.672	1.525	1.703	1.494	1.735	1.464	1.768
75	1.598	1.652	1.571	1.680	1.543	1.709	1.515	1.739	1.487	1.770
80	1.611	1.662	1.586	1.688	1.560	1.715	1.534	1.743	1.507	1.772
85	1.624	1.671	1.600	1.696	1.575	1.721	1.550	1.747	1.525	1.774
90	1.635	1.679	1.612	1.703	1.589	1.726	1.566	1.751	1.542	1.776
95	1.645	1.687	1.623	1.709	1.602	1.732	1.579	1.755	1.557	1.778
100	1.654	1.694	1.634	1.715	1.613	1.736	1.592	1.758	1.571	1.780
150	1.720	1.746	1.706	1.760	1.693	1.774	1.769	1.788	1.665	1.802
200	1.758	1.778	1.748	1.789	1.738	1.779	1.728	1.810	1.718	1.820

Table 7b_ Continued

k=	= 6	k:	= 7	k=	8	k=	= 9	k=10	
dL	dU								
-	-	-	-	_	-	-		-	-
-	-	-	-	-	-	-	_	-	-
	-	-	-	-	-	-	-	-	•
	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	-	-	-		-		_	-	-
0.203	3.005	-	-	_ `	-	-	-	-	
0.268	2.832	0.171	3.149	-	-	-	•	-	-
0.328	2.692	0.230	2.985	0.147	3.266	-	-	-	-
0.389	2.572	0.286	2.848	0.200	3.111	0.127	3.360	-	-
0.447	2.472	0.343	2.727	0.251	2.979	0.175	3.216	0.111	3.438
0.502	2.388	0.398	2.624	0.304	2.860	0.222	3.090	0.155	3.304
0.554	2.318	0.451	2.537	0.356	2.757	0.272	2.975	0.198	3.184
0.603	2.257	0.502	2.461	0.407	2.667	0.321	2.873	0.244	3.073
0.649	2.206	0.459	2.396	0.456	2.589	0.369	2.783	0.290	2.974
0.692	2.162	0.595	2.339	0.502	2.521	0.416	2.704	0.336	2.885
0.732	2.124	0.637	2.290	0.547	2.460	0.461	2.633	0.380	2.806
0.769	2.090	0.677	2.246	0.588	2.407	0.504	2.571	0.424	2.734
0.804	2.061	0.715	2.208	0.628	2.360	0.545	2.514	0.465	2.670
0.837	2.035	0.751	2.174	0.666	2.318	0.584	2.464	0.506	2.613
0.868	2.012	0.784	2.144	0.702	2.280	0.621	2.419	0.544	2.560
0.897	1.992	0.816	2.117	0.735	2.246	0.657	2.379	0.581	2.513
0.925	1.974	0.845	2.093	0.767	2.216	0.691	2.342	0.616	2.470
0.951	1.958	0.874	2.071	0.798	2.188	0.723	2.309	0.650	2.431
0.975	1.944	0.900	2.052	0.826	2.164	0.753	2.278	0.682	2.396
0.998	1.931	0.926	2.034	0.854	2.141	0.782	2.251	0.712	2.363
1.020	1.920	0.950	2.018	0.879	2.120	0.810	2.226	0.741	2.333
1.041	1.909	0.972	2.004	0.904	2.102	0.836	2.203	0.769	2.306
1.061	1.900	0.994	1.991	0.927	2.085	0.861	2.181	0.795	2.281
1.080	1.891	1.015	1.979	0.950	2.069	0.885	2.162	0.821	2.257
1.097	1.884	1.034	1.967	0.971	2.054	0.908	2.144	0.845	2.236
1.114	1.877	1.053	1.957	0.991	2.041	0.930	2.127	0.868	2.216
1.131	1.870	1.071	1.948	1.011	2.029	0.951	2.112	0.891	2.198
1.146	1.864	1.088	1.939	1.029	2.017	0.970	2.098	0.912	2.180
1.161	1.859	1.104	1.932	1.047	2.007	0.990	2.085	0.932	2.164

Table 7b: Continued

1.175	1.854	1.120	1.924	1.064	1.997	1.008	2.072	0.945	2.149
1.238	1.835	1.189	1.895	1.139	1.958	1.089	2.002	1.038	2.088
1.291	1.882	1.246	1.875	1.201	1.930	1.156	1.986	1.110	2.044
1.334	1.814	1.294	1.861	1.253	1.909	1.212	1.959	1.170	2.010
1.372	1.808	1.335	1.850	1.298	1.894	1.260	1.939	1.222	1.984
1.404	1.805	1.370	1.843	1.336	1.882	1.301	1.923	1.266	1.964
1.433	1.802	1.401	1.837	1.369	1.873	1.337	1.910	1.305	1.948
1.458	1.801	1.428	1.834	1.399	1.867	1.369	1.901	1.339	1.935
1.480	1.801	1.453	1.831	1.425	1.861	1.397	1.893	1.369	1.925
1.500	1.801	1.474	1.829	1.448	1.857	1.422	1.886	1.396	1.916
1.518	1.801	1.494	1.827	1.469	1.854	1.445_	1.881	1.420	1.909
1.535	1.802	1.512	1.827	1.489	1.852	1.465	1.877	1.442	1.903
1.550	1.803	1.528	1.826	1.506	1.850	1.484	1.874	1.462	1.898
1.651	1.817	1.637	1.832	1.622	1.847	1.608	1.862	1.594	1.877
1.707	1.831	1.697	1.841	1.686	1.852	1.675	1.863	1.665	1.874

Table 7b - Continued

n	k=11		k=	12	k=	13	k=14		k=15	
	dL	dU								
16	0.098	3.503	-	-	-	-	-	-	-	-
17	0.138	3.378	0.087	3.557	-	_	-	-	-	-
18	0.177	3.265	0.123	3.441	0.078	3.603	_	-	_	-
19	0.220	3.159	0.160	3.335	0.111	3.496	0.070	3.642	_	-
20	0.263	3.063	0.200	3.234	0.145	3.395	0.100	3.542	0.063	3.676
21	0.307	2.976	0.240	3.141	0.182	3.300	0.132	3.448	0.091	3.583
22	0.349	2.897	0.281	3.057	0.220	3.211	0.166	3.358	0.120	3.495
23	0.391	2.826	0.322	2.979	0.259	3.128	0.202	3.272	0.153	3.409
24	0.431	2.761	0.362	2.908	0.297	3.053	0.239	3.193	0.186	3.327
25	0.470	2.702	0.400	2.844	0.335	2.983	0.275	3.119	0.221	3.251
26	0.508	2.649	0.438	2.784	0.373	2.919	0.312	3.051	0.256	3.179
27	0.544	2.600	0.475	2.730	0.409	2.859	0.348	2.987	0.291	3.112
28	0.578	2.555	0.510	2.680	0.445	2.805	0.383	2.928	0.325	3.050
29	0612	2.515	0.544	2.634	0.479	2.755	0.418	2.874	0.359	2.992
30	0.643	2.477	0.577	2.592	0.512	2.708	0.451	2.823	0.392	2.937
31	0.674	2.443	0.608	2.553	0.545	2.665	0.484	2.776	0.425	2.987
32	0.703	2.411	0.638	2.517	0.576	2.625	0.515	2.733	0.457	2.840
33	0.731	2.382	0.668	2.484	0.606	2.588	0.546	2.692	0.488	2.796
34	0.758	2.355	0.695	2.454	0.634	2.554	0.575	2.654	0.518	2.754
35	0.783	2.330	0.722	2.425	0.662	2.521	0.604	2.619	0.547	2.716
36	0.808	2.306	0.748	2.398	0.689	2.492	0.631	2.586	0.575	2.680
37	0.831	2.285	0.772	2.374	0.714	2.464	0.657	2.555	0.602	2.646
38	0.854	2.265	0.796	2.351	0.739	2.438	0.683	2.526	0.628	2.614
39	0.875	2.246	0.819	2.329	0.763	2.413	0.707	2.499	0.653	2.585
40	0.896	2.228	0.840	2.309	0.785	2.391	0.731	2.473	0.678	2.557
45	0.988	2.156	0.938	2.225	0.887	2.296	0.838	2.367	0.788	2.439
50	1.064	2.103	1.019	2.163	0.973	2.225	0.927	2.287	0.882	2.350
55	1.129	2.062	1.087	2.116	1.045	2.170	1.003	2.225	0.961	2.281

Table 7b : Continued

(0)	1 104	2.031	1.145	2.079	1.106	2.127	1.068	2.177	1.029	2.227
60	1.184		1.195	2.049	1.160	2.093	1.124	2.138	1.088	2.183
65	1.231	2.006	1.239	2.026	1.206	2.066	1.172	2.106	1.139	2.148
70	1.272	1.986		2.006	1.247	2.043	1.215	2.080	1.184	2.118
75	1.308	1.970	1.277		1.283	2.024	1.253	2.059	1.224	2.093
80	1.340	1.957	1.311	1.991		2.009	1.287	2.040	1.260	2.073
85	1.369	1.946	1.342	1.977	1.315		1.318	2.025	1.292	2.055
90	1.395	1.937	1.369	1.966	1.344	1.995		2.012	1.321	2.040
95	1.418	1.929	1.394	1.956	1.370	1.984	1.345	1	1.347	2.026
100	1.434	1.923	1.416	1.948	1.393	1.974	1.371	2.000		1.956
150	1.579	1.892	1.564	1.908	1.550	1.924	1.535	1.940	1.519	1.931
200	1.654	1.885	1.643	1.896	1.632	1.908	1.621	1.919	1.610	1.931

Table 7b – Continued

k=	16	k=	17	k=18 k= 19		k=	20		
dL	dU	dL	dU	dL	dU	dL	dU	dl	dU
-	•	-	•	-	-	-	•	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
-	*	-	-	-	-	•	-	-	-
-	-	-	-	-	-	-	-	-	•
-	-	-	-	-	-	-	9	-	-
0.058	3.705	-	•	-	-	-	-	-	-
0.083	3.619	0.052	3.731	-	-	_	-	-	
0.110	3.535	0.076	3.650	0.048	3.753	-	-	-	-
0.141	3.454	0.101	3.572	0.070	3.678	0.044	3.773	-	-
0.172	3.376	0.130	3.394	0.094	3.604	0.065	3.702	0.041	3.790
0.205	3.303	0.160	3.420	0.120	3.531	0.087	3.632	0.060	3.724
0.238	3.233	0.191	3.349	0.149	3.460	0.112	3.563	0.081	3.658
0.271	3.168	0.222	3.283	0.178	3.392	0.138	3.495	0.104	3.592
0.305	3.107	0.254	3.219	0.208	3.327	0.166	3.431	0.129	3.528
0.337	3.050	0.286	3.160	0.238	3.266	0.195	3.368	0.156	3.465
0.370	2.996	0.317	3.103	0.269	3.208	0.224	3.309	0.183	3.406
0.401	2.946	0.349	3.050	0.299	3.153	0.253	3.252	0.211	3.348
0.432	2.899	0.379	3.000	0.329	3.100	0.283	3.198	0.239	3.293
0.462	2.854	0.409	2.954	0.359	3.051	0.312	3.147	0.267	3.240
0.492	2.813	0.439	2.910	0.388	3.005	0.340	3.099	0.295	3.190
0.520	2.774	0.467	2.868	0.417	2.961	0.369	3.053	0.323	3.142
0.548	2.738	0.495	2.829	0.445	2.920	0.397	3.009	0.351	3.097
0.575	2.703	0.522	2.792	0.472	2.880	0.424	2.968	0.378	3.054
0.600	2.671	0.549	2.757	0.499	2.843	0.451	2.929	0.404	3.013
0.626	2.641	0.575	2.724	0.525	2.808	0.477	2.892	0.430	2.974
0.740	2.512	0.692	2.586	0.644	2.659	0.598	2.733	0.553	2.807
0.836	2.414	0.792	2.479	0.747	2.544	0.703	2.610	0.660	2.675
0.919	2.338	0.877	2.396	0.836	2.454	0.795	2.512	0.754	2.571
0.990	2.278	0.951	2.330	0.913	2.382	0.874	2.434	0.836	2.487
1.052	2.229	1.016	2.276	0.980	2.323	0.944	2.371	0.908	2.419
1.105	2.189	1.072	2.232	1.038	2.275	1.005	2.318	0.971	2.362
1.153	2.156	1.121	2.195	1.090	2.235	1.058	2.275	1.027	2.315
1.195	2.129	1.165	2.165	1.136	2.201	1.106	2.238	1.076	2.275
1.232	2.105	1.205	2.139	1.177	2.172	1.149	2.206	1.121	2.241
1.266	2.085	1.240	2.116	1.213	2.148	1.187	2.179	1.160	2.211
1.296	2.068	1.271	2.097	1.247	2.126	1.222	2.156	1.197	2.186

Table 7b : Continued

1.324	2.053	1.301	2.080	1.277	2.108	1.253	2.135	1.229	2.164
1.504	1.972	1.489	1.989	1.474	2.006	1.458	2.023	1.443	2.040
1.599							1.979		1.991

Table 8: Five Percent Significance of $\,\partial_{4,L}\,$ and $\,\partial_{4,U}\,$ for Regressions with Quarterly Dummy Variable $\,$ (k = k' + 1)

n	k'=1		k'=1 k'=2		k'= 3		k'=	= 4	k'= 5	
ĺ	d _{4,L}	d _{4.U}	$d_{4,L}$	$d_{4,U}$	$d_{4,L}$	$d_{4,U}$	d _{4,L}	$d_{4,U}$	d _{4,L}	$d_{4,U}$
16	0.774	0.982	0.662	1.109	0.549	1.275	0.435	1.381	0.350	1.532
20	0.924	1.102	0.827	1.203	0.728	1.327	0.626	1.428	0.544	1.556
24	1.036	1.189	0.953	1.273	0.867	1.371	0.779	1.459	0.702	1.565
28	1.123	1.257	1.050	1.328	0.975	1.410	0.898	1.487	0.828	1.576
32	1.192	1.311	1.127	1.373	1.061	1.443	0.993	1.511	0.929	1.587
36	1.248	1.355	1.191	1.410	1.131	1.471	1.070	1.532	1.013	1.598
40	1.295	1.392	1.243	1.422	1.190	1.496	1.135	1.550	1.082	1.609
44	1.335	1.423	1.288	1.469	1.239	1.518	1.189	1.567	1.141	1.620
48	1.369	1.451	1.326	1.493	1.281	1.537	1.236	1.582	1.191	1.630
52	1.399	1.475	1.359	1.513	1.318	1.554	1.276	1.595	1.235	1.639
56	1.426	1.496	1.389	1.532	1.351	1.569	1.312	1.608	1.273	1.648
60	1.449	1.515	1.415	1.548	1.379	1.583	1.343	1.619	1.307	1.656
64	1.470	1.532	1.438	1.563	1.405	1.596	1.371	1.629	1.337	1.664
68	1.489	1.548	1.459	1.577	1.427	1.608	1.396	1.639	1.364	1.671
72	1.507	1.562	1.478	1.589	1.448	1.618	1.418	1.648	1.388	1.678
76	1.522	1.574	1.495	1.601	1.467	1.628	1.439	1.656	1.411	1.685
80	1.537	1.586	1.511	1.611	1.484	1.637	1.457	1.663	1.431	1.691
84	1.550	1.597	1.525	1.621	1.500	1.646	1.475	1.671	1.449	1.696
88	1.562	1.607	1.539	1.630	1.515	1.654	1.490	1.677	1.466	1.702
92	1.574	1.617	1.551	1.639	1.528	1.661	1.505	1.684	1.482	1.707
96	1.584	1.626	1.563	1.647	1.541	1.668	1.519	1.690	1.496	1.712
100	1.594	1.634	1.573	1.654	1.552	1.674	1.531	1.695	1.510	1.717



Introduction to Econometrics

By

M. Dr. HUSSAIN A. BEKHET

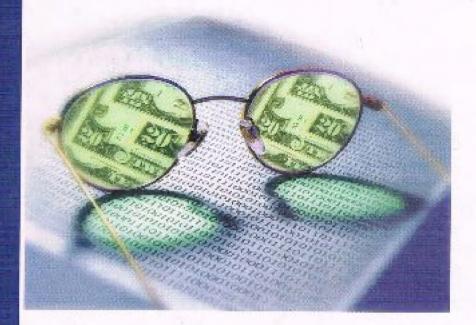
College of administration and Economics

Baghdad University

Dr. SAHAR F. MOHAMMED ALL

Catego of administration and Economics

Baghdad University





دار السيسازوري العسلمية للنسشر والتسوزيع

عمان - الأردن - وسط البلد - شارع اللك حسين - مقابل مجمع الفحيص التجاري هاتفاكس : 6826 482 485 461 4185 + ص-ب : 520848 الرمز البريدي: 11152 www.yazori.com F-mail : info@yazori.com

